دولة الأمارات العربية المتحدة
وزارة التربية و التعليم و الشباب
منطقة دبي التعليمية

المادة : الرياضيات
زمن الإجابة: ثلاث ساعات
عدد صفحات الأسئلة (١٥)
اليوم ، التاريخ :الأربعاء ٢٠٠٢/١/٢

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول- يناير/٢٠٠٢
الصف الثالث الثانوي العلمي

ملاحظات : ١) الإجابة على نفس الورقة .
٢) يتكون الأمتحان من مجموعتين من الأسئلة :
(١) **الأولى** : وعدد أسئلتها خمسة و المطلوب الإجابة عنها جميعا .
(٢) **الثانية** : وتشمل السؤالين السادس و السابع و المطلوب الإجابة عن **أحدهما فقط**

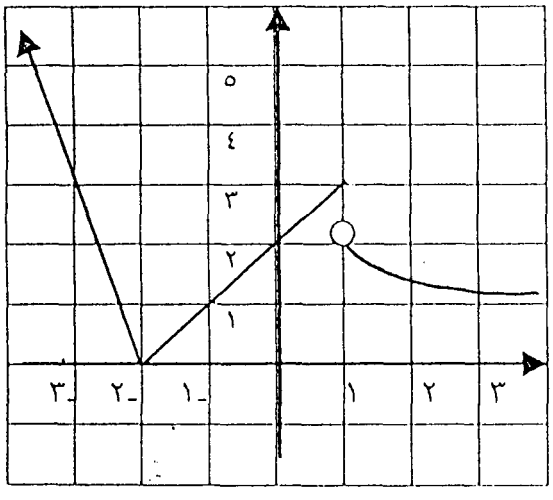
المجموعة الأولى: أجب عن الأسئلة الخمسة التالية

٥٠

السؤال الأول : (٥٠ درجة)

٨

(أ) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة ق المعرفة على ح
أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :



١ (١) نهـــــــا ق(س) = ٢
س ← ٠

١ (٢) نهـــــــا ق(س) = ١
س ← ∞

١ (٣) نهـــــــا ق(س) = ٢
س ← ١+

٢ (٤) قيم ب بحيث نهـــــــا ق(س) = ٣ هي ١ ، ٢ ، ٣-
س ← ب

١ (٥) ق غير متصلة عند س = ١ لأن نهـ ق(س) ≠ نهـ ق(س)
س ← ١+ ، س ← ١-

٢ (٦) متوسط التغير للدالة ق عندما تتغير س من ٢- الى ١ = $\frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)} = \frac{٠ - ٣}{١ + ٢}$

$= \frac{٣}{٣} = ١$

يتبـــــع

٢٠ (ب) أوجد كلاً من النهايات التالية :

(١) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س^{٢} - ٣س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+١} - ٢)(\sqrt{س+١} + ٢)}{س(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س + ١ - ٤}{س(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{١}{س(\sqrt{س+١} + ٢)} = \frac{١}{٣(٢+٢)} = \frac{١}{١٢}$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتاس}}{٩س \text{ جاس}}$

$= \frac{١ + \text{جتا}٠}{٩ \times ٠ \times \text{جا}٠}$

= غير موجودة

(٣) $\lim_{س \to -٥} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٥}}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

$|س| = \begin{cases} س & س > ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to -٥} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٥}}{(س+٥)(س-٢)}$ ، $س < -٥$

$= \lim_{س \to -٥} \frac{-س}{(س+٥)(س-٢)} = \frac{-(-٥)}{٠ \times -٧} = \frac{١}{-٧}$

(٤) $\lim_{س \to -\infty} \left(\frac{٢س^{٢}}{س^{٢} - ٢} - \frac{س}{س^{٢} + ٢} \right)$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٣} + ٤س^{٢} - س^{٣} + ٢س}{س^{٣} - ٤}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٣} + ٤س^{٢} + ٢س}{س^{٣} - ٤}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٣}}{س^{٣}} = ١$

(٥) $\lim_{س \to ١+} \frac{س^{٢} - [س]}{\text{جا}(٢س - ٢)}$

$س \to ١+$ يكون $[س] = ١$ حوار اليمين لـ ١

$\therefore$ النهـ $= \lim_{س \to ١+} \frac{س^{٢} - ١}{\text{جا}(٢س-٢)}$

$= \lim_{س \to ١+} \frac{(س-١)(س+١)}{\text{جا}(٢س-٢)}$

نضع $ص = ٢(س-١)$ ينتج

$ص \to ٠$ عندما $س \to ١+$

$\therefore$ النهـ $= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{٢} \times \frac{ص+٢}{\text{جا}ص} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٥س + \text{ظا}٢س^{٢}}{٧س - ٢س^{٢}}$ قتاس

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا}٥س}{س} + \frac{\text{ظا}٢س^{٢}}{س^{٢}}}{\frac{٧س}{س} - \frac{٢س^{٢}}{س}} \times \frac{١}{\text{جاس}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا}٥س}{٥س} \times ٥ + \frac{\text{ظا}٢س^{٢}}{٢س^{٢}} \times ٢}{٧ - ٢س} \times \frac{س}{\text{جاس}}$

$= \frac{٥ + ٢}{٧ - ٠} = \frac{٧}{٧} = ١$

يتبع

١٢ (جـ) اذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٣س + ٣} & ٢ \geq س \geq ٤ \\ \dfrac{س^{٣} - ٨}{٤س - ٨} & -٣ \leq س < ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال ق على $[-٣ ، ٤]$

الحل :

١) نبحث الاتصال عند س = ج

١ ..... ق(ج) = $\sqrt{٣ + ج \times ٣}$ = $\sqrt{٣ + ٣ \times ٢}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

ج ..... $\lim_{س \to ج}$ ($\sqrt{٣ + ٣س}$) = $\sqrt{٣ + ٣ \times ٢}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

$\lim_{س \to ج}$ ق(س) = $\lim_{س \to ج}$ $\dfrac{س^{٣} - ٨}{٤س - ٨}$ = $\lim_{س \to ج}$ $\dfrac{(س - ج)(س^{٢} + ج س + ج^{٢})}{٤(س - ج)}$

$\lim_{س \to ج}$ $\dfrac{س^{٢} + ج س + ج^{٢}}{٤}$ = $\dfrac{ج^{٢} + ج^{٢} + ج^{٢}}{٤}$ = $\dfrac{١٢}{٤}$ = ٣

∴ $\lim_{س \to ج}$ ق(س) = ق(ج) = ٣ ∴ ق متصلة عند س = ج .

٢) نبحث الاتصال في $[-٣ ، ج[$ = $[-٣ ، ٢[$

٣ ..... ق(س) = $\dfrac{س^{٣} - ٨}{٤س - ٨}$ في $[-٣ ، ٢[$

∵ ق دالة نسبية متصلة في $ح - \{ج\}$ / $ح$ = أعداد الفترة

∴ ق متصلة في $[-٣ ، ٢[- \{ج\}$ ولكن ج ∉ $[-٣ ، ٢[$

∴ ق متصلة في $[-٣ ، ٢[$.

٣) نبحث الاتصال في $[ج ، ٤]$ = $[٢ ، ٤]$

٢ ..... ق(س) = $\sqrt{٣ + ٣س}$ في $[ج ، ٤]$ = $[٢ ، ٤]$ دالة الجذر

ما تحت الجذر $٣ + ٣س \geq ٠$ في الفترة $[ج ، ٤]$ = $[٢ ، ٤]$ ، ق(س) = ٣

صورة متصلة في ح ∴ متصلة في $[ج ، ٤]$ ∴ ق متصلة في $[٢ ، ٤]$

١ ، ٢ ، ٣ نتبع أن ق متصلة في $[-٣ ، ٤]$

٥٠

السؤال الثاني : (٥٠ درجة)

١٥

(أ) اذا كانت

$$ق(س) = \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢} \quad ، \quad هـ(س) = \frac{ظا ٦س}{٣س}$$

أوجد نهـــــا (ق ٥ هـ)(س)
س ← ٠

الحـــل : ١) نهـــا هـ(س) = نهـــا ظا ٦س / ٣س = ٢
س ← ٠ س ← ٠

٢) ق(س) ∉ ح لأن جوار مثقوب للصفر

٣) نهـــا ق(س) = نهـــا |س-٣| - ١ / س - ٢ = ١
س ← ٢ س ← ٢

|س-٣| = { ١ + س - ٣ ، س < ٣ ; ٢ + ٣ - س ، س > ٣ }

نهـــا ١ + س - ٣ / س - ٢ = نهـــا ١ = ١
س ← ٢ س ← ٢

نهـــا ٢ + ٣ - س / س - ٢ = نهـــا ١ - س / س - ٢ = نهـــا -١ = -١
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

∴ نهـــا (ق ٥ هـ)(س) = نهـــا ق(س) = ١
س ← ٠ س ← ٢

٥

ب) اثبت أن للمعادلة

٢س - ظا س = ٠ حل في الفترة] -π/٤ ، π/٤ [دون حل المعادلة

الحـــل : نضع ت(س) = ٢س - ظا س متصلة على] -π/٤ ، π/٤ [

ت(-π/٤) = ٢ × -π/٤ - ظا -π/٤ = -π/٢ + ١ < ٠ ∴ ت(-π/٤) ، ت(π/٤)

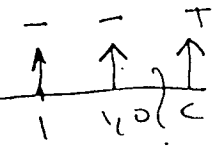
ت(π/٤) = ٢ × π/٤ - ظا π/٤ = π/٢ - ١ > ٠ أحدهما موجب والآخر سالب

∴ حسب نتيجة نظرية القيمة الوسطية يوجد ع ∈] -π/٤ ، π/٤ [

بحيث ت(ع) = ٠ ∴ يوجد حل للمعادلة

س = ظا س عند ع في الفترة] -π/٤ ، π/٤ [

يتبـــع



(جـ) باستخدام نظرية القيمة الوسيطية أوجد بمحاولتين قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{٥ + ١}$

الحل: نضع س = $\sqrt[3]{٥ + ١}$ ⇐ س^{٣} = ٥ + ١ ⇐ س^{٣} − ٥ = ٠ ⇐ ت(س) = س^{٣} − ٥

ت(١) = ١ − ٥ = −٤ ، ت(٢) = ٨ − ٥ = ٣ ت(١) ، ت(٢) أحدهما موجب والآخر سالب

∴ حسب نتيجة نظرية القيمة الوسيطية يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل ج ∈]١ ، ٢[

بحيث ت(ج) = صفر وحتى تحسب (لأقرب منزلة عشرية واحدة) نوجد

ت(١,٥) = سالب ∴ يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل ج ∈]١,٥ ، ٢[بحيث ت(ج) = صفر وحتى تحسب

ثانية $\frac{٢,٥}{c} = \frac{c+١,٥}{c} = ١,٧٥$ ∴ متى تعدد $١,٧٥ + ١$

(د) اذا كانت ق(س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٢س}$ ، ابحث اشارة ق على مجالها

الحل: أصفار البسط: س = −٣ ، أصفار المقام س = ٠ ، س = ٢

∴ ق متصلة على]−∞ ، −٣[،]−٣ ، ٠[،]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞+[

ونكون الجدول

الفترات	]−∞ ، −٣[	]−٣ ، ٠[	]٠ ، ٢[	]٢ ، ∞+[
ص	−٤	−١	١	٣
ق(ص)				
اشارة ق	−	+	−	+

(هـ) اذا كانت د(س) = $\frac{٢س^{٢} - ١٨}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣

أعد تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند س = ٣

الحل: حتى تصبح د متصلة عند س = ٣ يجب ايجاد $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = د(٣) لذا نوجد $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٢س^{٢} - ١٨}{س - ٣}$

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٢(س^{٢} - ٩)}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٢(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣}$ ٢(س + ٣) = ٢ × ٦ = ١٢

∴ د(٣) = ١٢ فتكون د الدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{٢س^{٢} - ١٨}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ١٢ & س = ٣ \end{cases}$

يتبع متصلة عند س = ٣

٥٠

السؤال الثالث: (٥٠ درجة)

١٠ (أ) اذا كانت ق(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ أوجد قَ (١) باستخدام تعريف المشتقة

الحل: ...

٢٠ (ب) أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ في كل مما يأتي :

(١) ص = ٥ س$^{\frac{٤}{٥}}$ + س$^{-٣}$ - ٣ ١٠

(٢) ص = س^{٦} ظتا٥ س

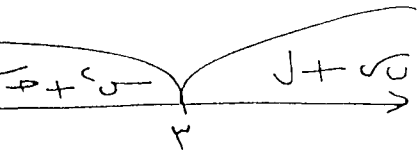
(٣) ص = ٢(جا $\sqrt{س}$)^{٣} + قا(س^{٣} - ٥)

(٤) ص = (٥ س^{٢} - $\frac{١}{س}$)^{٤}

(٥) ص = م^{٢} + م + ٣ ، م = ٥ - س عند س = ١

١٠ (جـ) اذا كانت

$$ت(س) = \begin{cases} س^{٢} + جـ س & س < ٣ \\ ب س + ل & س \leq ٣ \end{cases}$$



اوجد ب ، جـ ، ل اذا كان $ت'(٣) = ٥$

الحل : $\because ت'(٣) = ٥ \quad \because ت(س)$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٣$ فهي

عند $س = ٣$ فهي متصلة عند $س = ٣$

$$\therefore ب + ل = (ب س + ل) = (س^{٢} + جـ س) = ٩ + ٣جـ$$

$$ت'(س) = \begin{cases} ٢س + جـ & س > ٣ \\ ب & س = ٣ \\ ٢س & س < ٣ \end{cases}$$

$$\therefore ت'_{+}(٣) = ت'_{-}(٣) = ٥$$

$$\therefore ب = ٥ \quad ، \quad ٦ + جـ = ٥ \Leftarrow جـ = -١$$

$$\therefore ٣ب + ل = ١٥ + ل$$

$$٦ = ٩ - ٣ = ٩ + ٣جـ = ٩ + ٣(-١) = ٦$$

$$\therefore ١٥ + ل = ٦$$

$$\therefore ل = -٩$$

١٠ (د) اذا كان $٢ص^{٢} + س^{٣}ص - ٥س = ١١$

اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-١ ، ٢)$

الحل : نوجد ميل المماس : $٤ص ص' + س^{٣}ص' + ٣س^{٢}ص - ٥ = ٠$

$$\therefore ٤ \times ٢ ص' + (-١)^{٣} ص' + ٣ \times (-١)^{٢} \times ٢ - ٥ = ٠$$

$$\therefore ٨ص' - ص' + ٦ - ٥ = ٠ \Leftarrow ٧ص' = -١ \Leftarrow ص' = -\frac{١}{٧}$$

$\therefore$ ميل المماس $= -\frac{١}{٧}$ ، النقطة $(-١ ، ٢)$ $\therefore$ معادلة المماس

$$\therefore ص - ٢ = -\frac{١}{٧}(س + ١) \Leftarrow ٧ص + س - ١٣ = ٠$$

ميل العمودي $= ٧$ مقلوب ميل المماس مع تغيير الاشارة

$\therefore$ معادلة العمودي $ص - ٢ = ٧(س + ١)$

$$ص - ٧س - ٩ = ٠$$

يتبع

٥٠

السؤال الرابع: (٥٠ درجة)

٢٠

(أ) اذا كان د(٢) = ١ ، د`(٢) = -٢ أوجد هَ (٢) فيما يلي

كل فرع ٥ درجات

(١) اذا كانت هـ(س) = ٢ د^٤(س)

هَ(س) = ٨ د^٣(س) × د`(س)

هَ(٢) = ٨ د^٣(٢) × د`(٢)

= ٨ (١)^٣ × -٢ = -١٦

(٢) اذا كانت هـ (س) = $\frac{د(س)}{\sqrt{د(س)}}$

هَ(س) = $\frac{د`(س)}{\sqrt{د(س)}}$

هَ(٢) = $\frac{د`(٢)}{\sqrt{د(٢)}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{١}}$ = $\frac{-٢}{٢}$ = -١

(٣) اذا كانت هـ (س) = $\frac{٣}{د(س)}$

هَ(س) = $\frac{-٣ د`(س)}{(د(س))^٢}$

هَ(٢) = $\frac{-٣ د`(٢)}{(د(٢))^٢}$ = $\frac{-٣ \times -٢}{(١)^٢}$ = ٦

(٤) اذا كانت هـ (س) = د(س^٣ - ٦)

هَ(س) = د`(س^٣ - ٦) × ٣س^٢

هَ(٢) = د`(٢) × ٣ × ٤

= -٢ × ٣ × ٤

= -٢٤

١٠

(ب) اذا كانت المسافة ف التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من حركته تعطى بالعلاقة

ف(ن) = ٢ - ٦ن^٢ + ن^٣

أوجد ١) السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢]

٢) سرعة الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها العجلة .

الحل: ١) السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$ = $\frac{-٢٤ + ٨ - ٢}{٢}$ = $\frac{-١٨}{٢}$ = -٨ م/ث

٢) السرعة = ف`(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن

العجلة = ف``(ن) = ٦ن - ١٢

عندما تنعدم العجلة يكون ٦ن - ١٢ = ٠ ⇐ ٦ن = ١٢ ⇐ ن = ٢

فتكون السرعة = ف`(٢) = ٣ × ٤ - ١٢ × ٢ = ١٢ - ٢٤ = -١٢ م/ث

يتبع

١٤

(جـ) إذا كانت ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ١

أوجد :

١) فترات التزايد والتناقص للدالة ق

٢) القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة ق مبينا نوع كل منها

الحل : ق (س) حدودية متصلة على ح ∴ قابلة للاشتقاق على ح

ق' (س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ نضع ق' (س) = ٠

٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠

س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠

(س - ٣) (س - ١) = ٠

اما س = ٣ او س = ١ تكون الجدول

س	∞-		١		٣		∞
ق' (س)		+	٠	-	٠	+	
ق (س)		↗		↘		↗	
		صغرى محلية		عظمى محلية			

∴ عند س = ١ يوجد قيمة عظمى محلية وهي ق (١) = ١ - ٦ + ٩ + ١ = ٥

عند س = ٣ يوجد قيمة صغرى محلية وهي ق (٣) = ٢٧ - ٥٤ + ٢٧ + ١ = ١

الدالة متزايدة على]-∞ ، ١] ، [٣ ، ∞[

الدالة متناقصة على [١ ، ٣]

٦

(أ) إذا كانت هـ (٢س + ٤) = س^{٥} - ٦س + ١ أوجد هـ' (٢)

نضع ٢س + ٤ = جـ

الحل : (هـ (جـ (س)))' = هـ' (جـ (س)) × جـ' (س)

٢ × (٥س^{٤} - ٦) = هـ' (٢س + ٤)

لنفرض س = -١

٢ × (٥(-١)^{٤} - ٦) = هـ' (-٢ + ٤)

هـ' (٢) = ٥ - ٦

هـ' (٢) = -١

لايجاد س

هـ' (جـ) = هـ' (٢)

جـ = ٢ + ٤

جـ = ٦

س = ١

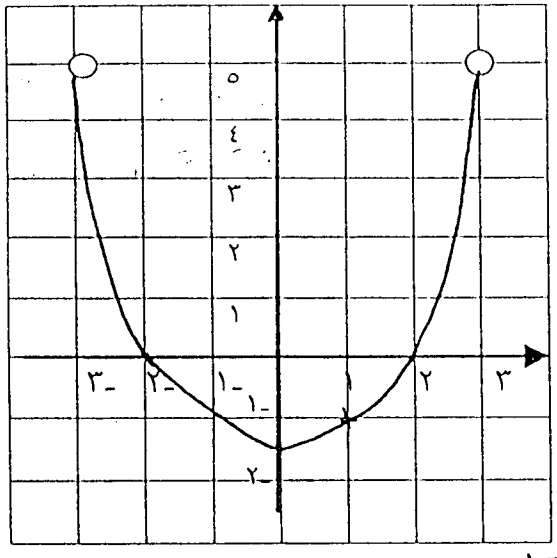
يتبع

٥٠

السؤال الخامس: (٥٠ درجة)

١٠ كل فرع درجتين

(أ) الرسم المجاور يمثل بيان دَ (س) المشتقة للدالة المتصلة د على [-٣ ، ٣]
منه أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :



(١) د (س) متناقصة على الفترة [-٢ ، ٢]

(٢) النقاط الحرجة للدالة د هي
-٣ ، -٢ ، ٢ ، ٣

(٣) للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = -٢

(٤) دَ (٠) صفر

(٥) نهـا $\frac{د(س) - د(١)}{س - ١}$ = دَ (١) = -١
س ← ١

٤٠ كل فرع ٤ درجات

(ب) ضع دائرة فيما يلي حول رمز الإجابة الصحيحة :

١) نهـا $\frac{جا \frac{١}{٢} \pi}{\pi}$ =
هـ ← ٠

أ) ١ ب) جا $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{\pi}$

٢) الدالة التي لا تحقق شروط نظرية القيمة الوسيطية على الفترة [-١ ، ٣] هي

أ) $\frac{٣}{|س - ٥|}$ ب) $\frac{٢س}{٣س + ٥}$ جـ) [س + ٥] د) $\sqrt{٥ - س}$

٣) اذا كان للدالة ق(س) = جـ $س^{٢}$ - ٣س - ٥ مماسا ل $\overleftrightarrow{}$ معادلته : ص - ٥س + ٩ = ٠
عند النقطة س = ١ فان جـ =

أ) $\frac{١}{٥}$ ب) ٤ جـ) ٥ د) -٤

٤) إذا كان ص = ق(س) وكان $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٢ قاس + Δ س

عندما تتغير س من س إلى س + Δ س فإن $\left| \frac{ص}{س} \right|_{س=\pi}$ =

(أ) -٢ ب) -٢ + Δس جـ) ٢ د) صفر

٥) اذا كان هـ(س) = ٢ - س ، ق(س) = س + ٣ فأن نهـــا ق(هـ^{٢}(س)) =
س ← ٠

أ) -٧ (ب) ٧ جـ) ٤ د) -١

٦) اذا كانت د حدودية وكان نهـــا $\frac{د(س)}{س - ٣}$ = ٨ فأن (د(٣) ، د'(٣)) =
س ← ٣

أ) (٣ ، ٨) ب) (٨ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٨) د) غير ذلك

٧) اذا كان د(س) = $\begin{cases} \sqrt{س} & س \leq ١ \\ أ س^{٢} + \frac{٣}{٢} & س > ١ \end{cases}$

وكان متوسط تغير الدالة د عندما تتغير س من -١ الى ٤ يساوي $\frac{٢}{٥}$ فأن أ =

أ) $\frac{٧}{٢}$ ب) غ $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٧}{٨}$

٨) اذا كان ق'(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ فأن نهـــا $\frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ}$ =
هـ ← ٠

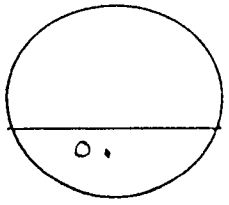
أ) $\frac{١}{٣}$ ب) غير موجودة جـ) $\frac{٢}{٢٧}$ (د) $-\frac{١}{٩}$

٩) اذا كانت د'(س) = $\frac{٣}{س^{٢}}$ - ٣ فان مجموعة القيم الحرجة للدالة د المعرفة على ح+ هي

أ) {٠} ب) {١ ، -١} جـ) {٠ ، ١ ، -١} (د) {١}

١٠) اذا كان للدالة ق(س) = ب س^{٣} - ٣س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س = ٢ فان ب =

أ) -١ ب) ١,٥ (جـ) ١ د) غير ذلك



المجموعة الثانية اجب عن أحد السؤالين التاليين

السؤال السادس: (٥٠ درجة)

١٠

أ) اذا كانت ص = ظا س اثبت أن ص‴ جتا ٢س - ٢ ص = ٠

الحل :

ص = ظا س

ص' = ٢ قا س × قا س ظا س

= ٢ قا٢ س ظا س

نفوض في الطرف الايسر ٢ قا٢ ظا س × جتا٢ س = ٢ × ظا س

= ١ / جتا٢ س × ظا س × جتا٢ س = ٢ ظا س

= ٢ ظا س = ٢ ص

= الطرف الأيسر #

١٥

ب) اذا كانت د(س) = ٢س - √(س + ٣) ، هـ (س) = جتا٢س + جاس

أوجد (د ○ هـ)' (س) عند س = π/٦

الحل : (د ○ هـ)' (س) = د' (هـ (س)) × هـ' (س)

(د ○ هـ)' (π/٦) = د' (هـ (π/٦)) × هـ' (π/٦)

= د' (١) × هـ' (π/٦)

= ٧/٤ × ٣٧ / ٢

= ٣٧ / ٨

هـ (π/٦) = جتا٢ (π/٦) + جا (π/٦) = ١/٢ + ١/٢ = ١

نفرض هـ (س) = ص

هـ' (π/٦) = ٢ص = ٢ص

٢ص × dص/dس = ٢

د' (س) = ٢ = ١ / √(س + ٣)

د' (١) = ٢ = ١ / √٤ = ١/٤

يتبع

جـ) اذا كانت $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$

١٠

اوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المطلقة للدالة على الفترة [-٢ ، ٣]

الحل:

$قـ(س) = \frac{١ \times (س^{٢}+١) - ٢س \times س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = \frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

نوجد النقاط الحرجة بمساواة المقدار بالصفر $قـ(س) = ٠ \Leftarrow ١ - س^{٢} = ٠$

$س = \pm ١$ ✓

$س^{٢} + ١ \neq ٠$ لجميع قيم س

نوجد $قـ(-٢) = \frac{-٢}{٥}$

$قـ(٣) = \frac{٣}{١٠}$

$قـ(١) = \frac{١}{٢}$ ← قيمة عظمى مطلقة للدالة عند س

$قـ(-١) = \frac{-١}{٢}$ ← قيمة صغرى مطلقة للدالة عند س

١٥

د) صفيحة رقيقة مستطيلة الشكل تتمدد بالحرارة بانتظام، عرضها يساوي ثلثي طولها فإذا كان معدل زيادة مساحتها = ٤ سم^{٢} / ث فاوجد معدل تزايد الطول في اللحظة التي يكون فيها الطول = ٢ سم

الحل:

نفرض العرض س ، الطول ص منه $س = \frac{٢}{٣} ص$

$\frac{د م}{د ن} = ٤$ سم^{٢} / ث المطلوب $\frac{د ص}{د ن}$ عندما ص = ٢ سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ص \times س$

$م = ص \times \frac{٢}{٣} ص \Leftarrow م = \frac{٢}{٣} ص^{٢}$

نشتق ضمنياً بالنسبة للزمن $\frac{د م}{د ن} = \frac{٢}{٣} \times ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن}$

$٤ = \frac{٤}{٣} \times ٢ \times \frac{د ص}{د ن}$

$\frac{د ص}{د ن} = \frac{٣}{٢}$ سم / ث

٥٠

السؤال السابـع: (٥٠ درجة)

١٠ أ) اذا كانت ص = $\frac{\text{س}}{(\text{س}-١)^{٢}}$ ، س ≠ ١ اثبت أن (س-١) صً + ٢صَ = ٠

الحـل : $\text{ص}' = \frac{(\text{س}-١)^{٢} \times ١ - \text{س} \times ٢(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)^{٤}}$ ⟸ $\text{ص}'' = \frac{(\text{س}-١)^{٤} \times ٢ \times ١ - (\text{س}-١)^{٢} \times ٢ \times ٢}{(\text{س}-١)^{٨}}$

∴ صً = $\frac{٤}{(\text{س}-١)^{٣}}$ نعوض عن صً ، صَ في الطرف الايسر فينتج

$\frac{٤}{(\text{س}-١)^{٣}} \times (\text{س}-١) + \frac{-٤}{(\text{س}-١)^{٣}} \times ٢$

$= \frac{٤}{(\text{س}-١)^{٢}} - \frac{٤}{(\text{س}-١)^{٢}} = $ الطرف الايمن

= الطرف الايسر

١٥ ب) اذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٦-٣\text{س}^{٢} & \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢}+\text{س} & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

اوجد (هـ ٥ د)َ (١)

الحـل : (هـ ٥ د)َ (أ) = هـَ (د(١)) × دَ (١)

د(١) = $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

دَ (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$

دَ (١) = $\frac{١}{\sqrt{١+٣}}$ = $\frac{١}{٢}$

هـَ (س) = $\begin{cases} -٦\text{س} & \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}+١ & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

هـَ (٢) = -٦ × ٢ = -١٢

= $\frac{١}{٢}$ × -١٢ = -٦

الا يـ نعوض في

يتبـع

١٠ جـ) اذا كانت ق(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{٢ - جاس}}$ متصلة على $[0, 2\pi]$

اوجد القيمة العظمى والصغرى المطلقة للدالة ق على $[0, \pi]$

الحل: ق(س) = $\frac{-\text{جاس}(2-\text{جاس}) - -\text{جتاس} \times \text{جتاس}}{(2-\text{جاس})^2}$

$= \frac{-2\text{جاس} + \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{(2-\text{جاس})^2} = \frac{-2\text{جاس} + 1}{(2-\text{جاس})^2}$

$-2\text{جاس} + 1 = 0 \Leftarrow \text{جاس} = \frac{1}{2} \Leftarrow$ س $= \frac{\pi}{6}$ أو س $= \frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$

لماذا $2 - \text{جاس} \neq 0$

ق$(\frac{\pi}{6})$ = $\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{6}}{2 - \text{جا}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ← قيمة عظمى

ق$(\frac{5\pi}{6})$ = $\frac{\text{جتا}\frac{5\pi}{6}}{2 - \text{جا}\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ← قيمة صغرى مطلقة للدالة

ق(٠) = $\frac{1}{2}$ ، ق(π) = $\frac{-1}{2}$

١٥ د) قمع على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي ٣ أمثال نصف قطر قاعدته يتسرب منه الماء بانتظام بمعدل ٤سم^3 / د أوجد معدل تغير نصف قطر قاعدته في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر القاعدة = ٢ سم (حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع)

الحل: ع = ٣ نق ، $\frac{\text{د ح}}{\text{د ز}} = -4\pi$ سم^3 / د ، نق = ؟

$\frac{\text{د نق}}{\text{د ز}} = ؟$

ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 × ٣ نق

ح = π نق^3

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ز}} = 3\pi$ نق^2 $\frac{\text{د نق}}{\text{د ز}}$

$-4\pi = 3\pi \times 4 \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ز}} \Leftarrow \frac{\text{د نق}}{\text{د ز}} = \frac{-1}{3\pi}$ سم / د

انتهت الأسئلـــــــة

مع تمنياتنا لكـم بالتوفيق والنجاح