جدول التكاملات غير المحدودة

١ ـ الدوال التى تحتوى على $a + bx$ وتكون درجة هذه العبارة عدداً صحيحاً

1) $$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln (a + bx) + C.$$

2) $$\int (a + bx)^n \, dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b\,(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$$

3) $$\int \frac{x\, dx}{1 + bx} = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \ln (a + bx)] + C.$$

4) $$\int \frac{x^2\, dx}{a + bx} = \frac{1}{b^3} [\tfrac{1}{2} (a + bx)^2 - 2a (a + bx) + a^2 \ln (a + bx)] + C.$$

5) $$\int \frac{dx}{x\,(a + bx)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2\,(a + bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$$

7) $$\int \frac{x\, dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln (a + bx) + \frac{a}{a + bx} \right] + C.$$

8) $$\int \frac{x^2\, dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a + bx - 2a \ln (a + bx) - \frac{a^2}{a + bx} \right] + C.$$

9) $$\int \frac{dx}{x\,(a + bx)^2} = \frac{1}{a\,(a + bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$$

10) $$\int \frac{x\, dx}{(a + bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a + bx} + \frac{a}{2\,(a + bx)^2} \right] + C.$$

٢ – الدوال التى تحتوى على $a^2 + x^2,\ a^2 - x^2,\ a + bx^2$

11) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C.$$

12) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

13) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} + C$$

14) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x + a}{x - a} + C.$$

15) $$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan x \sqrt{\frac{b}{a}} + C$$ (عندما تكون $a > 0,\ b > 0$)

إذا كانت كلتا الكميتين a, b سالبتين فإننا نخرج الإشارة السالبة (—) خارج علامة التكامل ، أما إذا كانت a, b مختلفتى الإشارة فإننا نستخدم العلاقة 16 .

16) $$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C.$$

17) $$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \ln \left(x^2 + \frac{a}{b} \right) + C.$$

18) $$\int \frac{x^2\,dx}{a + bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

19) $$\int \frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a + bx^2} + C.$$

$$20)\quad \int \frac{dx}{x^2\,(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

$$21)\quad \int \frac{d}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a\,(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

٣ – الدوال التى تحتوى على $\sqrt{a+bx}$

$$22)\quad \int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C.$$

$$23)\quad \int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2\,(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15\,b^2} + C.$$

$$24)\quad \int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2\,(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105\,b^3} + C.$$

$$25)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2\,(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$$

$$26)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\,(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15\,b^3}\sqrt{a+bx} + C.$$

$$27)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C$$ (عندما تكون $a>0$)

$$28)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C$$ (عندما تكون $a<0$)

$$29)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{a\,x} - \frac{b}{2\,a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}\ ,$$

انظر بعد ذلك رقم 27 أو رقم 28 .

$$30)\quad \int \frac{\sqrt{a+bx}\ dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}\ ,$$

انظر بعد ذلك رقم 27 أو رقم 28 .

٤ ـ الدوال التى تحتوى على $\sqrt{x^2+a^2}$

$$31)\quad \int \sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$32)\quad \int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\ dx = \frac{x}{8}\left(2\,x^2+5\,a^2\right)\sqrt{x^2+a^2} +$$

$$+\ \frac{3a^4}{8}\ln\ x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$33)\quad \int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3} + C.$$

$$34)\quad \int x^2\sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x}{8}\left(2\,x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}\ -$$

$$-\ \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

$$35)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

$$36)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

37) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

38) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

39) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

40) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

41) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C.$$

42) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

43) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

44) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

٥ ـ الدوال التى تحتوى على $\sqrt{a^2-x^2}$

45) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

46) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

47) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

48) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

49) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

50) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

51) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

52) $$\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

53) $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} + C.$$

54) $$\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5} + C.$$

55) $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

56) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

57) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

58) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C.$$

59) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

60) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

61) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

٦ – الدوال التى تحتوى على $\sqrt{x^2-a^2}$

62) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

63) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

64) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$$

65) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

66) $$\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

67) $$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3} + C.$$

68) $$\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5} + C.$$

69) $$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

70) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

71) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

72) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$$

73) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C.$$

74) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + C.$$

75) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C.$$

76) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

77) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

٧ — الدوال التى تحتوى على $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{2ax + x^2}$

نكامل الدوال التى تحتوى على $\sqrt{2ax - x^2}$ بإجراء التعويض $t = x - a$. عندئذ $\sqrt{2ax - x^2}$ تأخذ الصورة $\sqrt{a^2 - t^2}$ ، ونجد هذا التكامل فى المجموعة ٥ من هذا الجدول . أما إذا لم يكن موجوداً فى الجدول فنسعى إلى تحويله إلى صورة موجودة فى الجدول .

ويمكننا قول نفس الشىء عن الدالة التى تحتوى على العبارة $\sqrt{2ax + x^2}$. وفى هذه الحالة يحول التعويض $t = x + a$ العبارة الموجودة تحت الجذر إلى الصورة $\sqrt{t^2 - a^2}$ (المجموعة ٦ من هذا الجدول) .

٨ — الدوال التى تحتوى على $a + bx + cx^2$ $(c > 0)$

$$78)\ \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & \text{عندما تكون } b^2 < 4ac \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \dfrac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C, & \text{عندما تكون } b^2 > 4ac \end{cases}$$

$$79)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right) + C.$$

$$80)\ \int \sqrt{a + bx + cx^2}\, dx = \frac{2cx + b}{4c} \sqrt{a + bx + cx^2} -$$

$$- \frac{b^2 - 4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln \left(2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right) + C.$$

$$81)\ \int \frac{x\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{c} -$$

$$- \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln \left(2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right) + C.$$

٩ ـ الدوال التى تحتوى على $a + bx - cx^2 \; (c > 0)$

$$82) \int \frac{dx}{a + bx - cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cx + b} + C.$$

$$83) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

$$84) \int \sqrt{a + bx - cx^2}\, dx = \frac{2cx - b}{4c} \sqrt{a + bx - cx^2} +$$

$$+ \frac{b^2 + 4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

$$85) \int \frac{x\, dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{\sqrt{a + bx - cx^2}}{c} +$$

$$+ \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

١٠ ـ الدوال الجبرية الأخرى

$$86) \int \sqrt{\frac{a + x}{b + x}}\, dx = \sqrt{(a + x)(b + x)} + (a - b) \ln (\sqrt{a + x} +$$

$$+ \sqrt{b + x}) + C.$$

$$87) \int \sqrt{\frac{a - x}{b + x}}\, dx = \sqrt{(a - x)(b + x)} + (a + b) \arcsin \sqrt{\frac{x + b}{a + b}} + C.$$

$$88) \int \sqrt{\frac{a + x}{b - x}}\, dx = -\sqrt{(a + x)(b - x)} - (a + b) \arcsin \sqrt{\frac{b - x}{a + b}} + C.$$

89) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

90) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$

١١ — الدوال الأسية والمثلثية

91) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

92) $\int e^x\, dx = e^x + C.$

93) $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

94) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

95) $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

96) $\int \tan x\, dx = -\ln \cos x + C.$

97) $\int \cot x\, dx = \ln \sin x + C.$

98) $\int \sec x\, dx = \ln(\sec x + \tan x) + C = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

99) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C = \ln \tan \frac{x}{2} + C.$

100) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C.$

101) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C.$

102) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C.$

103) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

104) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

105) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

106) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$

تستخدم هذه العلاقة عدة مرات إلى أن نحصل على التكامل $\int \sin^2 x\, dx$ أو $\int \sin x\, dx$ (وذلك حسب ما إذا كانت n زوجية أم فردية) ، وعندئذ نجد هذين التكاملين وفقاً للرقمين 104 و 94 .

107) $\int \cos^n x\, dx = \dfrac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقمين 105 و 95) .

108) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$.

تستخدم هذه الخطوة عدة مرات إلى أن تعطينا التكامل $\int dx$ عندما تكون n عدداً زوجياً ، أو تعطينا التكامل $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ عندما تكون n عدداً فردياً (التكامل الأخير موجود تحت الرقم 99) .

109) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \; \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقم 98) .

110) $\int \sin x \cos^n x\, dx = -\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

111) $\int \sin^n x \cos x\, dx = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

112) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx = \dfrac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx.$

تستخدم هذه الخطوة عدة مرات إلى أن تصبح قوة جيب التمام مساوية للصفر (عندما تكون m زوجية) أو مساوية للواحد الصحيح (عندما تكون m فردية) . بالنسبة للحالة الأولى انظر رقم 106 وبالنسبة للحالة الثانية انظر رقم 111 . وتستخدم هذه العلاقة عندما تكون $n < m$. أما إذا كانت $n > m$ فيستحسن استخدام العلاقة الآتية :

113) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx = -\dfrac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x\, dx$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقمين 107 و 110) .

$$\left.\begin{aligned}
&114)\ \int \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C.\\
&115)\ \int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C.
\end{aligned}\right\} (m \neq n)$$

116) $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos (m+n) x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n) x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n).$

117) $$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C,$$

عندما تكون b $>$ a .

118) $$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C,$$

عندما تكون b $<$ a .

119) $$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C,$$

عندما تكون b $>$ a .

120) $$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} + C,$$

عندما تكون b $<$ a .

121) $$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b \tan x}{a} \right) + C.$$

122) $$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

123) $$\int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

124) $$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

125) $\int e^{ax} \cos nx \, dx = \dfrac{e^{ax} (n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$

126) $\int x e^{ax} \, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C.$

127) $\int x^n e^{ax} \, dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx.$

تستخدم هذه العلاقة عدة مرات إلى أن تصبح قوة x مساوية للواحد الصحيح ، عندئذ نجد التكامل وفقاً للرقم 126 .

128) $\int x a^{mx} \, dx = \dfrac{x a^{mx}}{m \ln x} - \dfrac{a^{mx}}{m (\ln a)^2} + C.$

129) $\int x^n a^{mx} \, dx = \dfrac{a^{mx} x^n}{n \ln a} - \dfrac{n}{m \ln a} \int a^{mx} x^{n-1} \, dx.$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن تصبح قوة x مساوية للواحد الصحيح ، عندئذ نجد التكامل وفقاً للرقم 125 .

130) $\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \dfrac{e^{ax} \cos^{n-1} x \, (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} +$

$+ \dfrac{n (n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx.$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن يختفي جيب التمام (عندما تكون n زوجية) أو إلى أن تصبح قوة جيب التمام مساوية للواحد الصحيح (عندما تكون n فردية) . وفي الحالة الأخيرة انظر الرقم 125 .

131) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$

132) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$

133) $\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C.$

134) $\int \coth x \, dx = \ln \sinh x + C.$

135) $\int \operatorname{sech} x \, dx = 2 \arctan e^x + C.$

136) $\int \operatorname{cosech} x \, dx = \ln \tanh \dfrac{x}{2} + C.$

137) $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C.$

138) $\int \operatorname{cosech}^2 x\, dx = -\coth x + C.$

139) $\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = \operatorname{sech} x + C.$

140) $\int \operatorname{cosech} x \coth x\, dx = -\operatorname{cosech} x + C.$

141) $\int \sinh^2 x\, dx = -\dfrac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + C.$

142) $\int \cosh^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh^2 2x + C.$

١٢ – الدوال اللوغاريتمية

نورد أدناه الدوال التى تحتوى فقط على لوغاريتم طبيعى . أما إذا كان المطلوب إيجاد تكامل دالة تحتوى على لوغاريتم ذى أساس آخر ، فإننا نحوله أولا إلى لوغاريتم طبيعى حسب العلاقة $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ ثم نستخدم الجدول .

143) $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$

144) $\int \dfrac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C.$

145) $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1}\left[\dfrac{\ln x}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

146) $\int \ln^n x\, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x\, dx.$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن نحصل على التكامل $\int \ln x\, dx$ الذى يحل حسب العلاقه رقم 143 .

147) $x^m \int \ln^n x\, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \dfrac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x\, dx.$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن نحصل على التكامل رقم 145 .