الفصل الثاني

مفاهيم أوليّة في التحليل العددي المصفوفاتي

نورد في هذا الفصل بعضاً من النتائج والخواص المتعلّقة بالمصفوفات والفضاءات الشعاعيّة المنتهية البعد والتي نحتاجها لاحقاً في أغلب الموضوعات التي سنعالجها في الفصول القادمة.

1. تعاريف ومفاهيم أساسيّة

ليكن V فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) بعده منته ويساوي n. نقول عن مجموعة $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ من عناصر الفضاء V إنّها تشكّل أساساً له إذا وفقط إذا كانت مستقلّةً خطّياً، وعندها نستطيع كتابة كل عنصر $v \in V$ بطريقةٍ وحيدة:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i$$

حيث $(v_i)_{1\le i\le n}$ هي مركّبات الشعاع v على عناصر الأساس $(e_i)_{1\le i\le n}$. باستخدام الكتابة المصفوفاتيّة، يمكننا تمثيل الشعاع $v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i$ بشعاع العمود

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

ونرمز بـــ v^T و v^* لأشعّة الأسطر التالية

$$v^T(v_1, v_2, \ldots, v_n), \qquad v^* = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n),$$

حيث ترمز الكتابة $\overline{\alpha}$ إلى العدد العقدي المرافق للعدد α. نسمّي عادةً شعاع السطر v^T **منقول** شعاع العمود v، كما نسمّي شعاع السطر v^* **مساعد** شعاع العمود v.

نسمّي التطبيق $\Bbbk \rightarrow V \times V : \langle \bullet , \bullet \rangle$ المعرّف بالعلاقة

- عندما $\Bbbk = \mathbb{R}$ $\quad \langle u\,, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i = u^T\, v = v^T\, u,$
- عندما $\Bbbk = \mathbb{C}$ $\quad \langle u\,, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \overline{v}_i = v^*\, u = \overline{u^*\, v},$

جداءاً سلّمياً إقليدياً عندما $\Bbbk = \mathbb{R}$ و**جداءاً سلّمياً هرميتياً** عندما $\Bbbk = \mathbb{C}$، وعندما لا نحدد ماهيّة حقل الأعداد السلّميّة $\Bbbk$ نسمّي هذا التطبيق جداءاً سلّمياً قانونياً.

ليكن V فضاءً شعاعياً مزوّداً بجداءٍ سلّمي قانوني. نقول عن شعاعين u و v من هذا الفضاء إنّهما متعامدان إذا كان $\langle u\,, v\rangle = 0$. بوجه عام، نقول عن عنصرٍ $v \in V$ إنّه عموديّ على مجموعة $U \subset V$ ونكتب اصطلاحاً $v \perp U$ عندما يكون الشعاع v عمودي على كل عنصر $u \in U$. وأخيراً، نقول عن مجموعةٍ من الأشعّة $\{v_1, \ldots, v_k\}$ من عناصر V إنّها متعامدة نظاميّة إذا حقّقت الشروط

$$\langle v_i\,, v_j\rangle = \delta_{i\,j}, \quad 1 \leq i\,, j \leq k,$$

حيث $\delta_{i\,j}$ هو رمز كرونكر Kronecker $(\delta_{i\,j} = 0$ إذا وفقط إذا كان $i = j)$.

ليكن V و W فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\Bbbk$، مزوَّدين بالأساسين $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ و $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ على الترتيب، وليكن $\mathcal{A}\colon V \rightarrow W$ تطبيقاً خطّياً. يُمَثّل هذا التطبيق بالنسبة لهذين الأساسين بمصفوفة فيها m سطراً و n عموداً:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

الأمثال فيها معرّفة بطريقة وحيدة بالعلاقات

$$\mathcal{A}\cdot e_j=\sum_{i=1}^{m}a_{i\,j}f_i,\quad 1\le j\le n.$$

وبعبارةٍ أخرى، يمثّل العمود رقم j من المصفوفة A الشعاع $\mathcal{A}\cdot e_j$ ممثّلاً بالأساس $(f_i)_{1\le i\le m}$. نرمز بـ $(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$ لشعاع السطر رقم i من المصفوفة A. نقول عن مصفوفة فيها m سطراً و n عموداً إنّها من النمط (m,n)، ونرمز بـ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ أو $\mathcal{M}_{m,n}$ للفضاء الشعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ المكوّن من المصفوفات من النمط (m,n) والتي عناصرها من الحقل $\mathbb{k}$. عندئذٍ يكون شعاع عمود مصفوفة من النمط $(m,1)$ ويكون شعاع سطر مصفوفة من النمط $(1,n)$. ونقول عن مصفوفة إنّها حقيقيّة أو عقديّة تبعاً لكون عناصرها من الحقل $\mathbb{R}$ أو من الحقل $\mathbb{C}$ على الترتيب.

- لتكن $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$، نعرّف المصفوفة المساعدة $A^*\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ بأنّها المصفوفة الوحيدة التي تحقق الشرط

$$\forall u\in\mathbb{C}^n,\forall v\in\mathbb{C}^m,\quad \langle Au\,,v\rangle_m=\langle u\,,A^*v\rangle_n$$

أي أنّ

$$(\forall i),(\forall j),\quad (A^*)_{i\,j}=\overline{a}_{j\,i}\,.$$

- وبنفس الطريقة، نعرّف منقول المصفوفة A بأنّها المصفوفة الوحيدة $A^T\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ التي تحقق الشرط

$$\forall u\in\mathbb{R}^n,\forall v\in\mathbb{R}^m,\quad \langle Au\,,v\rangle_m=\langle u\,,A^Tv\rangle_n\,.$$

- نقول عن مصفوفة من النمط (n,n) إنّها مربّعة من المرتبة n. نرمز بـ $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ أو $\mathcal{M}_n$ لحلقة المصفوفات المربّعة من المرتبة n والتي تنتمي عناصرها إلى الحقل $\mathbb{k}$. نسمّي المصفوفة $I=(\delta_{ij})$ المصفوفة المطابقة.
- نقول عن مصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ إنّها قلوبة إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ نسمّيها مقلوب المصفوفة بحيث يكون

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I.$$

وفي الحالة المعاكسة، نقول إنّ المصفوفة شاذّة أو غير قلوبة. نلاحظ هنا أنّه إذا كانت A و B مصفوفتان قلوبتان فإنّ:

- $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$,
- $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$,
- $(A^*)^T=(A^T)^*$,
- $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

تعريف 1: نقول عن مصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ إنّها:

- **متناظرة** إذا كانت حقيقيّة وكان $A=A^T$ ؛
- **هرميتية** إذا حقّقت الشرط $A=A^*$ ؛
- **متعامدة** إذا كانت حقيقيّة وكان $AA^T=A^TA=I$ ؛

- **واحديّة** إذا حقّقت الشرط $AA^* = A^*A = I$ ؛
- **نظاميّة** إذا حقّقت الشرط $AA^* = A^*A$.

نقول عن مصفوفة مربّعة $A = (a_{ij})$ إنّها **قطريّة** إذا حقّقت الشرط $a_{i\,j} = 0 \quad (\forall i \neq j)$، ونرمز لها بالكتابة التالية

$$A = \operatorname{diag}(a_{i\,i}) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

نسمّي **أثر المصفوفة** المربّعة $A = (a_{ij})$ العدد المعرّف بالعلاقة

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

تعريف 2: ليكن $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ تبديلاً لمجموعة الأدلّة $\{1, 2, \ldots, n\}$. نعرّف مصفوفة التبديل P_σ بأنّها المصفوفة

$$P_\sigma = (\delta_{i\,\sigma(j)}).$$

نلاحظ هنا أنّ مصفوفة التبديل هي مصفوفة متعامدة.

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة. نعرّف القيم الذاتيّة $(\lambda_i = \lambda_i(A))_{1 \le i \le n}$ لهذه المصفوفة بأنّها جذور كثير المميّز $\mathcal{X}_A$ (سواءاً كانت حقيقيّة أو عقديّة، مختلفةً أو منطبقةً على بعضها) المعرّف بالعلاقة

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

نسمّي مجموعة القيم الذاتيّة للمصفوفة A، **طيف المصفوفة** ونكتب

$$\operatorname{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(A)\}$$

☜ نذكّر هنا بالخواص التالية:

- $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$,
- $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A),$
- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B),$
- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A),$
- $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det(A) \cdot \det(B)$

نسمّي العدد الحقيقي الموجب المعرّف بالعلاقة

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda_i(A)| : 1 \le i \le n\right\}.$$

نصف القطر الطيفي للمصفوفة المربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

لتكن $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ قيمةً ذاتيّة للمصفوفة المربّعة A، نسمّي الشعاع $v \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}$ شعاعاً ذاتيّاً لهذه المصفوفة موافقاً للقيمة الذاتيّة λ إذا وفقط إذا حقّق الشرط

$$A \cdot v = \lambda \cdot v,$$

تكوّن مجموعة الأشعّة الذاتيّة الموافقة لقيمة ذاتيّة λ فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{k}^n$ (بُعده يساوي 1 على الأقل) نسمّيه **الفضاء الجزئي الذاتي** الموافق للقيمة الذاتيّة λ.

2. ردّ المصفوفات

ليكن V فضاءاً شعاعيّاً بعده منته ويساوي n، وليكن $\mathcal{A} : V \to V$ تطبيقاً خطّياً ممثلاً بالمصفوفة المربّعة $A = (a_{ij})$ بالنسبة لأساسٍ $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ وممثّلاً بالمصفوفة $B = (b_{ij})$ بالنسبة لأساسٍ آخر $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$. نعلم في هذه الحالة أنّ

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من الأساس $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ إلى الأساس $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ أعمدتها مكوّنة من مركّبات الأشعّة (f_j) على عناصر الأساس $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

مما تقدّم، نلاحظ أنّ التطبيق نفسه يُمَثَّل بمصفوفات مختلفة تبعاً للأساس الذي نختاره للفضاء V. نطرح هنا مسألة ايجاد أساس مناسب يكون فيه لهذا التطبيق تمثيلاً مصفوفاتياً بسيطاً قدر الإمكان. نبحث بين جميع المصفوفات المشابهة للمصفوفة A، (أي المصفوفات من الشكل $P^{-1} \cdot A \cdot P$ حيث P مصفوفة مصفوفة قلوبة) عن المصفوفات التي لها أبسط شكل ممكن وهذا ما نسمّيه مسألة ردّ مصفوفة.

إنّ أحسن حالات ردّ مصفوفة مربّعة هي تلك التي يمكن عندها إيجاد مصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1} \cdot A \cdot P$ قطريّة، وعندها نقول عن المصفوفة A إنّها تقبل الرّد إلى القطريّة وفي هذه الحالة تمثّل عناصر القطر في المصفوفة $P^{-1} \cdot A \cdot P$ القيم الذاتيّة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ للمصفوفة A وتمثّل أعمدة المصفوفة P الأشعّة الذاتيّة $p_1, \ldots, p_n$ الموافقة على الترتيب، أي:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_i) \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot p_j = \lambda_j \cdot p_j, \\ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

وبمعنى آخر، تقبل مصفوفة الرّد إلى القطريّة إذا وفقط إذا وجد أساس من الأشعّة الذاتيّة.

مبرهنـــة 1: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة. عندئذٍ:

أولاً: توجد مصفوفة واحديّة U بحيث تكون المصفوفة $U^{-1}AU$ مثلّثيّة من الأعلى،
ثانياً: إذا كانت المصفوفة A نظاميّة فإنّه توجد مصفوفة واحديّة V بحيث تكون المصفوفة $V^{-1}AV$ قطريّة،
ثالثاً: إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإنّه توجد مصفوفة متعامدة O بحيث تكون المصفوفة $O^{-1}AO$ قطريّة.

نتيجــة: استناداً إلى المبرهنة السابقة (ثانياً) فإنّ كل مصفوفة هرميتيّة أو واحديّة تقبل الرّد إلى قطريّة .

تعريف 3: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة، نسمّي الجذور التربيعيّة الموجبة للقيم الذاتيّة للمصفوفة A^*A قيماً شاذّة لها.

نلاحظ هنا أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة A^*A حقيقيّة وموجبة وذلك لأنّه إذا كان

$$A^*A \cdot p = \lambda \cdot p, \quad p \neq 0$$

فإنّ

$$(A \cdot p)^* A \cdot p = \lambda \cdot p^* p$$

كما نلاحظ أيضاً أنّ القيم الشاذّة لمصفوفة تكون موجبة تماماً إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A قلوبة. في الواقع لدينا

$$A\,p = 0 \Rightarrow A^*A\,p = 0 \Rightarrow p^*A^*A\,p = (A\,p)^* A\,p = 0 \Rightarrow A\,p = 0.$$

المبرهنة التالية تبيّن أنّ كل مصفوفة مربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ تكافئ مصفوفة قطريّة عناصر قطرها مكوّنة من قيمها الشاذّة.

مبرهنــة 2

أولاً: إذا كانت A مصفوفة حقيقيّة مربّعة، فإنّه توجد مصفوفتان متعامدتان U و V بحيث يكون

$$U^T A\,V = \operatorname{diag}(\mu_i),$$

ثانياً: إذا كانت A مصفوفة عقديّة مربّعة، فإنّه توجد مصفوفتان واحديّتان U و V بحيث يكون

$$U^* A\,V = \operatorname{diag}(\mu_i).$$

وفي كلتا الحالتين تمثّل الأعداد $\mu_i \geq 0$ القيم الشاذّة للمصفوفة A .

3. خواص المصفوفات المتناظرة والهرميتيّة

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة تمثّل تطبيقاً خطّياً من فضاء شعاعي V على الحقل $\mathbb{C}$، ومزوّد بجداء سلمي قانوني $\langle\cdot,\cdot\rangle$. نسمّي قسمة Rayleight للمصفوفة A التطبيق:

$$R_A : V \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

المعرّف بالعلاقة

$$\forall v \neq 0, \quad R_A(v) = \frac{\langle v\,, A\,v\rangle}{\langle v\,, v\rangle} = \frac{v^*Av}{v^*v}$$

نلاحظ هنا أنّه إذا كانت المصفوفة A هرميتيّة، فإنّ R_A يأخذ قيماً حقيقيّة. من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad R_A(\alpha v) = R_A(v).$$

مبرهنــة 3: لتكن A مصفوفة هرميتيّة من المرتبة n، قيمها الذاتيّة

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

ولتكن $\{p_1, \ldots, p_n\}$ أساس متعامد نظاميّ من الأشعّة الذاتيّة الموافقة، أي

$$(\forall i), (\forall j), \quad p_i^* \cdot p_j = \delta_{ij}$$

نرمز بـــ V_k إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولّد بالأشعّة $\{p_1, \ldots, p_k\}$ ونرمز بـــ $\mathcal{V}_k$ إلى مجموعة الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من V والتي بعدها يساوي k. نضع

$$V_0 = \{0\}, \quad \mathcal{V}_0 = \{V_0\},$$

عندئذٍ، تمتلك القيم الذاتيّة للمصفوفة A الخواص التالية:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = R_A(p_k),\\
&(2) \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = \max_{v \in V_k} R_A(v),\\
&(3) \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = \min_{v \perp V_{k-1}} R_A(v),\\
&(4) \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{v \in W} R_A(v),\\
&(5) \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{v \perp W} R_A(v),\\
&(6) \quad \{R_A(A) : v \in V\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

في الختام، نُذَكّر ببعض التعاريف:

- نقول عن مصفوفة هرميتيّة A إنّها معرّفة موجبة إذا حققت الشرط

$$\forall v \in V \setminus \{0\}, \quad v^* A v > 0,$$

- ونقول عنها إنّها موجبة إذا حققت الشرط

$$\forall v \in V, \quad v^* A v \geq 0,$$

ملاحظــة: يمكننا بمحاكمة بسيطة أن نبرهن أنّ مصفوفةً هرميتيّة تكون معرّفة موجبة أو موجبة إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها الذاتيّة موجبة تماماً أو موجبة على الترتيب.

4. النظيم الشعاعي والنظيم المصفوفاتي

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{k}$. نسمّي نظيماً شعاعياً على الفضاء V كلّ تطبيق $\| \, \| : V \to \mathbb{R}_+$ يحقّق الخواص التالية:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x \in V, \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$
- $\forall x \in V, \forall y \in V, \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$

تعرف الخاصّة الأخيرة باسم المتراجحة المثلّثية.

ليكن V فضاءاً شعاعياً منته البعد. إنّ النظائم الثلاث التالية هي الأكثر شيوعاً من الناحية العمليّة:

- $\|v\|_1 = \sum_i |v_i|,$
- $\|v\|_2 = \left(\sum_i |v_i|^2\right)^{1/2} = \langle v, v\rangle,$
- $\|v\|_\infty = \max_i v_i.$

يسمّى النظيم $\|\cdot\|_2$ بالنظيم الإقليدي. وبوجهٍ عام، تعرض لنا المبرهنة التالية جماعة من النظائم تشمل النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ السابقين.

مبرهنـــة 4: ليكن V فضاءاً شعاعياً منته البعد، وليكن $p \ge 1$ عدداً حقيقياً. إنّ التطبيق $\|\cdot\|_p$ المعرّف بالعلاقة

$$\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p},$$

هو نظيمٌ شعاعي.

الإثبـــات: يمكن التحقق بسهولة من صحّة المبرهنة عندما $p = 1$، لذلك نقتصر على الحالة التي يكون فيها $p > 1$. ليكن q عدداً حقيقياً $(1 < q)$ يحقق المعادلة

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

نعلم أنّه إذا كان α و β عددين حقيقيّين موجبين فإنّ:

$$\alpha \cdot \beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

وذلك لأنّ التابع الأسّي هو تابعٌ محدّب ويحقق المتراجحة:

$$\forall \theta \in]0,1[, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad e^{\theta x + (1-\theta) y} \le \theta\, e^x + (1-\theta)\, e^y.$$

يكفي أن نستبدل $\frac{1}{p}$ بـ θ و $p\log\alpha$ بـ x و $q\log\beta$ بـ y.

الآن، إذا كان u و v عنصرين من الفضاء V فإنّه تبعاً للمتراجحة السابقة يكون لدينا

$$\forall i, \quad \frac{|u_i v_i|}{\|u\|_p \cdot \|v\|_p} \le \frac{1}{p}\frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|v_i|^p}{\|v\|_q^q}$$

بأخذ المجموع عند طرفي هذه المتراجحات نجد

$$\sum_i |u_i v_i| \le \|u\|_p \cdot \|v\|_q \qquad \textbf{(متراجحة Hölder)}$$

حتّى نثبت أنّ $\|\cdot\|_p$ هو نظيم شعاعي، يكفي أن نبرهن صحّة المتراجحة المثلثيّة، وذلك لوضوح صحّة الخواص الأخرى. لدينا

$$\left(|u_i| + |v_i|\right)^p = |u_i|\left(|u_i| + |v_i|\right)^{p-1} + |v_i|\left(|u_i| + |v_i|\right)^{p-1}$$

بالجمع واستعمال المتراجحة السابقة نجد أنّ

$$\sum_i \left(|u_i| + |v_i|\right)^p \le \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)\left(\sum_i \left(|u_i| + |v_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

وتنتج المتراجحة المطلوبة من كون $(p-1)q = p$. ■

ملاحظة: في الحالة الخاصّة $p = 2$ تأخذ متراجحة Hölder الشكل التالي

$$\sum_i |u_i v_i| \le \left(\sum_i |u_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_i |v_i|^2\right)^{1/2}$$

وتعرف في هذه الحالة باسم متراجحة Cauchy-Schwarz أو متراجحة Bunyakovskii (وخاصّة في بلاد السوفييت سابقاً). كما تسمّى المتراجحة المثلثيّة في حالة النظيم $\|\cdot\|_p$:

$$\left(\sum_i |u_i + v_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_i |u_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}.$$

متراجحة Minkowski.

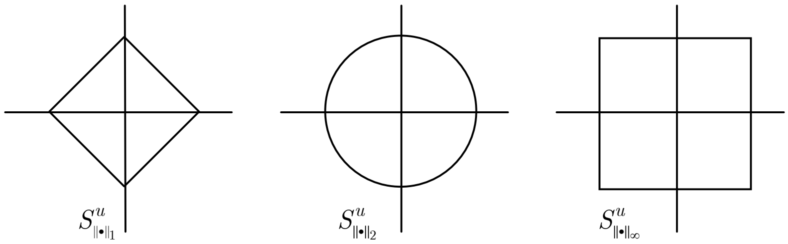
من الجدير ذكره هنا، هو أنّ جميع النظائم، في فضاءٍ شعاعي V منته البعد، متكافئة، بمعنى أنّه إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ نظيمين فإنّه يوجد عددان c_1 و c_2 بحيث يكون

$$\forall v \in V, \quad c_1 \|v\| \le \|v\|' \le c_2 \|v\|.$$

أمثـــلة:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

نسمّي شعاعاً واحدياً، في الفضاء الشعاعي المنته البعد V، منسوباً لنظيمٍ $\|\cdot\|$ كلّ عنصر من هذا الفضاء يحقق الشرط $\|x\| = 1$. كما نسمّي مجموعة العناصر $S^u_{\|\cdot\|} = \{x \in V : \|x\| = 1\}$ الكرة الواحديّة في هذا الفضاء. في الحالة الخاصّة $V = \mathbb{R}^2$ يمكننا تمثيل الكرة الواحديّة هندسياً كما يلي:



تعريف 4: لتكن $\mathcal{M}_n$ حلقة المصفوفات المربّعة من المرتبة n على الحقل $\Bbbk$. نسمّي نظيماً مصفوفاتياً كلّ تطبيق $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ يحقق الخواص التالية:

$$i. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$ii. \quad \forall \alpha \in \Bbbk, \forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$$

$$iii. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{M}_n, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$iv. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{M}_n, \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

أمثـــلة:

من بين أغلب النظائم المصفوفاتية استعمالاً في الجبر العددي الخطي ما يلي:

- نظيم فروبينوس *Frobinius* (ويدعى أيضاً النظيم الإقليدي):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

- النظيم $\|\cdot\|_p$:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \Bbbk^n \setminus \{0\}} \frac{\|A \cdot x\|_p}{\|x\|_p}, \qquad p \geq 1.$$

نلاحظ هنا أنّ

$$\|A\|_p = \sup_{x\in\Bbbk^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\cdot x\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|A\cdot x\|_p\,.$$

بوجهٍ عام، نستطيع ببساطة تامّة إنشاء نظيمٍ مصفوفاتي انطلاقاً من نظيمٍ على الفضاء الشعاعي $V \equiv \Bbbk^n$ كما يلي:

ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً على الفضاء V، التطبيق $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ المعرّف بالعلاقة

$$\|A\| = \sup_{x\in\Bbbk^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\cdot x\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|A\cdot x\|.$$

هو نظيم مصفوفاتي، ندعوه النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي $\|\cdot\|$. من جهةٍ أخرى، هناك نظائم مصفوفاتيّة غير ملحقة بأيّ نظيم شعاعي ؛ فعلى سبيل المثال، نظيم فروبينوس $\|\cdot\|_F$ هو نظيم مصفوفاتي غير ملحق ويحقق $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$.

☜ ملاحظة: يحقّق أيّ نظيمٍ مصفوفاتي ملحق دوماً الخاصّة $\|I_n\| = 1$.

مبرهنــة 5: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة. الخواص التالية صحيحة

✓ $$\|A\|_1 \stackrel{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

✓ $$\|A\|_2 \stackrel{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2\,,$$

✓ $$\|A\|_\infty \stackrel{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

النظيم $\|\cdot\|_2$ هو **نظيم لا متغيّر** بالتحويل الواحدي:

$$UU^* = I \Rightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2\,.$$

وفي حالة مصفوفة نظاميّة A يكون لدينا

$$A\cdot A^* = A^*\cdot A \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A).$$

ملاحظــات:

☜ إذا كانت A مصفوفة هرميتيّة أو متناظرة (ومن ثمّ فهي نظاميّة) فإنّ $\|A\|_2 = \rho(A)$.

☜ إذا كانت A مصفوفة واحديّة أو متعامدة (ومن ثمّ فهي نظاميّة) فإن

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

☜ من الناحية العمليّة، نلاحظ أنّ تعيين قيمة كلٍّ من النظيمين $\|A\|_1$ و $\|A\|_\infty$ بسيطٌ ولا يتطلّب سوى معرفة قيم عناصر المصفوفة A، على حين أن تعيين قيمة النظيم $\|A\|_2$ ليس بسيطاً.

النتيجة التالية تلعب دوراً هاماً في دراسة تقارب متتاليات المصفوفات.

مبرهنـــة 6: لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n. عندئذٍ يكون:

أولاً: أياً كان النظيم المصفوفاتي $\|\cdot\|$ (سواءٌ كان ملحقاً أم غير ملحق) فإنّ

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

ثانيـــاً: أيّاً كان العدد $\varepsilon > 0$، يوجد على الأقلّ نظيم مصفوفاتي ملحق بحيث تتحقق المتراجحة

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon.$$

الإثبـــات

أولاً: لتكن $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ بحيث $|\lambda| = \rho(A)$. وليكن v شعاعاً ذاتياً موافقاً للقيمة λ. عندئذٍ يكون

$$\rho(A) \cdot \|p \cdot p^T\| = \|\lambda p \cdot p^T\| = \|A \cdot pp^T\| \le \|A\| \cdot \|p \cdot p^T\|$$

بملاحظة أنّ $p \cdot p^T \neq 0$ نستنتج صحّة المتراجحة $\rho(A) \le \|A\|$.

ثانيـــاً: الإثبات هنا إنشائي بعض الشيء، ننصح القارئ المهتم بذلك بالاطلاع على الإثبات في كتاب P.G. CIARLET المعنون: "*Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*".

5. متتاليات الأشعّة ومتتاليات المصفوفات

ليكن V فضاءاً شعاعياً مزوّداً بنظيمٍ $\|\cdot\|$. نقول عن متتالية $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من عناصر V إنّها متقاربة نحو عنصرٍ $v \in V$، أو نقول أيضاً إنّ العنصر v هو نهاية المتتالية $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$، إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\| = 0,$$

ونكتب

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

إذا كان الفضاء الشعاعي V ذا بعدٍ يساوي $n \ge 1$، فإنّ تكافؤ النظائم يبيّن أنّ تقارب متتالية من الأشعّة مستقلّ عن النظيم المستعمل. من جهة أخرى، فإنّ الاختيار الخاص للنظيم $\|\cdot\|_\infty$ يبيّن أنّ تقارب متتالية من الأشعّة يكافئ تقارب n متتالية عدديّة مكوّنة من مركبّات الأشعّة.

بنفس الأسلوب، نعرّف تقارب متتالية من عناصر فضاء المصفوفات $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ والذي بعده يساوي $m \cdot n$. ونلاحظ أيضاً أنّ تقارب متتالية من المصفوفات لا يتعلّق بالنظيم المستعمل وأنّ تقارب متتالية من المصفوفات من النمط (m,n) يكافئ تقارب $m \cdot n$ متتالية عدديّة مكوّنة من مركبّات المصفوفات.

تعطينا النتيجة التالية شروطاً متكافئة لتقارب قوى مصفوفة مربّعة نحو المصفوفة الصفرية.

مبرهنة 7

لتكن B مصفوفة مربّعة. الشروط التالية متكافئة:

(1) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$ ،

(2) $\forall v \in V, \quad \lim_{k\to\infty} B^k v = 0$ ،

(3) $\rho(B) < 1$ ،

(4) يوجد على الأقل نظيمٌ ملحق $\|\cdot\|$ يحقق $\|B\| < 1$.

الإثبات

$(1) \Leftarrow (2)$: ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً شعاعياً وليكن $\|\cdot\|$ النظيم المصفوفاتي الملحق به. إذا كان $v \in V$ عنصراً ما، فإنّ المتراجحة

$$\|B^k \cdot v\| \leq \|B^k\| \cdot \|v\|$$

تبيّن أنّ

$$\lim_{k\to\infty} B^k v = 0.$$

$(2) \Leftarrow (3)$: إذا كان $1 \leq \rho(B)$، فإنّه من الممكن ايجاد شعاع p يحقق

$$p \neq 0, \quad B \cdot p = \lambda \cdot p, \quad |\lambda| \geq 1.$$

عندها يكون لدينا $B^k \cdot p = \lambda^k \cdot p$ ومن ثمّ لا تكون المتتالية $\left(B^k \cdot p\right)_{k\geq 1}$ متقاربة.

$(3) \Leftarrow (4)$: ينتج مباشرة من المبرهنة 6 (ثانيــاً).

$(4) \Leftarrow (1)$: يكفي أن نطبّق المتراجحة

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k$$

في حالة النظيم المعطى في (4). ■

تعرض المبرهنة التالية بعض الخواص الهامّة والمفيدة للمصفوفات من الشكل $(I - B)$.

مبرهنة 8

لتكن B مصفوفة مربّعة.

أولاً: إذا كان $\rho(B) < 1$ فإنّ المصفوفة $(I - B)$ تكون قلوبة ويساوي مقلوبها مجموع المتسلسلة

$$\boxed{(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k}$$

ثانيــاً: إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ فإنّ $\rho(B) < 1$.

ثالثــاً: إذا كان $\|\ \|$ نظيماً مصفوفاتياً يحقّق $\|B\| < 1$ فإنّ المصفوفة $(I - B)$ تكون قلوبة. إضافةً لذلك، إذا كان النظيم $\|\ \|$ **ملحقاً** فإنّ المقلوب $(I - B)^{-1}$ يحقق المتراجحة

$$\boxed{\left\|(I - B)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} B^k\right\| \le \frac{1}{1 - \|B\|}}$$

الإثبــات

أولاً: قولنا أنّ المصفوفة $(I - B)$ غير قلوبة يكافئ قولنا أنّ 1 هي قيمة ذاتيّة للمصفوفة B أي أنّ $\rho(B) \ge 1$ وهذا يناقض افتراضنا وبالتالي فإنّ المصفوفة $(I - B)$ قلوبة. من جهة ثانية، لدينا

$$(I - B)(I + B + B^2 + \cdots + B^m) = I - B^{m+1} \qquad (\$)$$

بضرب طرفي هذه المطابقة بالمصفوفة $(I - B)^{-1}$ نجد

$$I + B + \cdots + B^m = (I - B)^{-1} \cdot (I - B^{m+1})$$

ومنه يكون

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} B^k = (I - B)^{-1} \cdot \lim_{m\to\infty} (I - B^{m+1})$$

واستناداً إلى **المبرهنة 7** يكون $\lim_{m\to\infty} B^{m+1} = 0$، أي أنّ

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} B^k = (I - B)^{-1}$$

ثانيــاً: إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ ولنَقُلْ أنّ مجموعها S، أيْ

$$S = I + B + B^2 + \cdots + B^m + \cdots$$

فإنّ

$$S - BS = S - SB = I$$

ينتج من ذلك أنّ للمصفوفة $(I - B)$ مقلوبٌ هو S. بأخذ نهاية الطرفين في المطابقة $(\$)$ نجد

$$(I - B) \cdot S = I - \lim_{m\to\infty} B^m$$

وهذا يعني بدوره أنّ

$$\lim_{m\to\infty} B^m = 0$$

واستناداً إلى **المبرهنة 7** يكون $\rho(B) < 1$.

ثالثـــاً: استناداً إلى **المبرهنة 6** فإنّ $\rho(B) < 1$ ومن ثمّ واعتماداً على ما سبق (أولاً) فإنّ المصفوفة $(I - B)$ تكون قلوبة ومقلوبها هو

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\begin{aligned}\left\|(I - B)^{-1} \cdot (I - B^{m+1})\right\| &= \|I + B + \cdots + B^m\| \\ &\le 1 + \|B\| + \cdots + \|B\|^m \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = \frac{1}{1 - \|B\|}\end{aligned}$$

اعتمدنا هنا على كون النظيم المصفوفاتي ملحقاً في كون $\|I\| = 1$. بأخذ النهاية عندما $m \to \infty$ نجد أنّ

$$\left\|(I - B)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|B\|}$$

■

نتيجة: إذا كانت المصفوفة $(I - B)$ غير قلوبة فإنّ $\rho(B) \ge 1$.

مبرهنـــة 9

لتكن B مصفوفة مربّعة، وليكن $\|\cdot\|$ نظيم مصفوفاتي ما. عندئذٍ يكون لدينا

$$\lim_{k \to \infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B).$$

الإثبـــات

استناداً إلى **المبرهنة 6** لدينا $\rho(B) \le \|B\|$ ، ومن المطابقة $\rho(B) = \{\rho(B^k)\}^{1/k}$ نستنتج أنّ

$$\forall k \ge 1, \quad \rho(B) \le \|B^k\|^{1/k}.$$

لنبرهن الآن، أنّه أياً كان العدد $\varepsilon > 0$ يوجد عددٌ صحيح ℓ_ε بحيث يكون

$$k \ge \ell_\varepsilon \Rightarrow \|B^k\|^{1/k} \le \rho(B) + \varepsilon,$$

وهذا يكفي لإثبات المطلوب. ليكن إذن، $\varepsilon > 0$ عدداً معطى، نضع

$$B_\varepsilon = \frac{B}{\rho(B) + \varepsilon}$$

نلاحظ هنا أنّ $\rho(B_\varepsilon) < 1$ ، وبالاعتماد على **المبرهنة 8** يكون $\lim_{k \to \infty} B_\varepsilon^k = 0$. وهذا يثبت وجود عدد صحيح ℓ_ε يحقق

$$k \ge \ell_\varepsilon \Rightarrow \|B_\varepsilon^k\| = \frac{\|B^k\|}{\left(\rho(B) + \varepsilon\right)^k} \le 1,$$

وهو المطلوب. ■

6. مفهوم الحساسيّة في الجبر الخطّي

من النادر أن نحصل على حلٍّ لجملةٍ من المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ بدون أن يكون هذا الحلّ مشوباً بالأخطاء. يعود ذلك إلى مصادر الأخطاء المتعدّدة التي تتعرّض لها والتي بنتيجتها نحصل على حلّ فعلي لا يتطابق مع حلّ الجملة $A \cdot x = b$ وإنّما يتطابق مع حل الجملة المشوّشة:

$$(A + \Delta A) \cdot y = (b + \Delta b),$$

طبعاً، الأخطاء ΔA و Δb مجهولة، ولكنّها بوجه عام ، أياً كان مصدرها، تكون قابلة للتحديد والتقدير، فعلى سبيل المثال نَعرف خطأ التدوير المرتكب عند تمثيل أي عدد في النظام الحاسوبي. السؤال الذي يطرح نفسه هو كيفيّة تقدير أو تعيين حدّ أعلى للخطأ في الحل الذي يمثّله الفرق $(x - y)$ للجملتين الخطيّتين:

$$A \cdot x = b,$$
$$(A + \Delta A) \cdot y = (b + \Delta b).$$

بدلالة المقادير ΔA و Δb.

سندرس أيضاً، حساسيّة مسائل أخرى مثل حساب مقلوب مصفوفة و حلّ مسألة التربيعات الصغرى إضافةً إلى مسألة حساب القيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لمصفوفة تقبل الردّ إلى قطريّة.

لنتفحّص الآن مثالاً ينسب إلى R.S. Wilson. لتكن الجملة الخطيّة $A \cdot x = b$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولنفترض أنّ عناصر هذه الجملة معرّضة للتشويش كما يلي:

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}, \qquad b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 22.99 \\ 33.01 \\ 30.99 \end{pmatrix},$$

أي أنّ

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix},$$

من جهة أخرى، فإنّ حل الجملة $A \cdot y = (b + \Delta b)$ والتي تعرّض فيها الطرف الثاني للتشويش هو $y = (1.82, -0.36, 1.35, 0.79)^T$ ومن ثمّ يكون

$$\Delta x = y - x = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -1.36 \\ 0.35 \\ -0.21 \end{pmatrix}.$$

وكذلك فإنّ حلّ الجملة $(A + \Delta A) \cdot z = b$، حيث تعرضّت المصفوفة A للتشويش ΔA، هو $z = (-81, 137, -34, 22)^T$ ويكون الخطأ في الحل مساوياً

$$\Delta x = z - x = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

وهكذا فإننا نرى أنّ اضطراباً (تشويشاً) نسبياً من مرتبة 3×10^{-4}، يصيب الطرف الثاني من المعادلات الخطيّة، يتسبّب في حدوث اضطراب نسبي في الحلّ من مرتبة 0.8: وهذا يعني أنّ الخطأ قد تضخّم بمعدّل يقارب الـــ 2500 مرّة.

وكذلك فإننا نلاحظ أنّ تشويشاً نسبياً من مرتبة 10^{-2}، في عناصر مصفوفة الجملة الخطيّة، يتسبّب في خطأٍ نسبي في الحلّ من مرتبة 80.

7. حساسيّة مصفوفة قلوبة

نعرّف فيما يلي مفهوم الحساسيّة للمصفوفات المربّعة والقلوبة. ونصطلح أن تكون حساسيّة المصفوفات المربّعة غير القلوبة لا نهائيّة.

تعريف 5

ليكن $\|\cdot\|$ نظيماً مصفوفاتياً ؛ ولتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. نعرّف حساسيّة المصفوفة A بأنّها العدد الموجب:

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

والذي يرمز إليه أحياناً بالكتابة $\operatorname{cond}(A)$. وبوجهٍ خاص، لدينا $\kappa_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$ حيث $\|\cdot\|_p$ هو النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي $\|\cdot\|_p$.

المبرهنة التالية تبيّن بعضاً من خصائص عدد الحساسيّة $\kappa(A)$ لمصفوفة مربّعة وقلوبة.

مبرهنـــة 10: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. لدينا

أولاً: أياً كان $0 \neq \alpha \in \mathbb{k}$ فإنّ

$$\kappa(\alpha \cdot A) = \kappa(A)$$

ثانيـــاً: أياً كان النظيم المصفوفاتي الملحق $\|\cdot\|$ فإنّ $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$،

ثالثـــاً: لتكن $\mu_{\min} = \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n = \mu_{\max}$ القيم الشاذّة للمصفوفة A، عندها يكون

$$\kappa_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}.$$

رابعـــاً: $\kappa_2(A) = 1$ إذا وفقط إذا كان $A = \alpha \cdot Q$ حيث $\alpha \in \mathbb{k} \backslash \{0\}$ و Q مصفوفة واحديّة.

الإثبـــات:

أولاً: لدينا

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha \cdot A) &= \|\alpha \cdot A\| \left\|(\alpha A)^{-1}\right\| = |\alpha| \cdot \|A\| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot \|A^{-1}\| \\ &= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A).\end{aligned}$$

ثانيـــاً: لدينا

$$I = A \cdot A^{-1} \Rightarrow 1 = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

ثالثـــاً: نعلم أنّ

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^*A)} \lambda} = \mu_{\max},$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^{-1*}A^{-1}\right)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A\,A^*)} \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\mu_{\min}},$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\kappa_2(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}.$$

رابعـــاً: نعلم أنّه أياً كانت المصفوفة A فإنّه توجد مصفوفتان واحديّتـــان U و V ومصفوفة قطرية Σ عناصر القطر فيها هي القيم الشاذّة لهذه المصفوفة بحيث يكون $A = U \Sigma V^*$ واعتماداً على الخاصّة السابقة، في هذه المبرهنة، فإنّ $\kappa_2(A) = 1$ إذا وفقط إذا كانت جميع القيم الشاذّة للمصفوفة A متساوية فيما بينها. لنفرض α القيمة المشتركة لها، عندها يكون $\Sigma = \alpha \cdot I$ و $A = \alpha \cdot U V^*$ حيث $Q = U V^*$ مصفوفة واحديّة. ■

ملاحظـــات:

- نقول عن مصفوفة إنّها "جيّدة الحساسيّة"، إذا كانت حساسيّتها ليست كبيرة مقارنةً بالقيمة 1. الخاصّة الأخيرة في المبرهنة 1 تبيّن أنّ المصفوفات الواحديّة تتمتّع بحساسيّة مثلى $(\kappa_2(Q)=1)$، ولهذا السبب فهي شائعة الاستعمال في العديد من خوارزميّات التحليل العددي.

- في الحالة التي تكون فيها المصفوفة هرميتيّة، أي $A=A^*$ فإنّ $\mu_i=|\lambda_i(A)|$ وعندها يكون

$$\kappa_2(A)=\frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}.$$

- نعلم مما سبق أنّ مؤثّر الحساسيّة لمصفوفة $A\in\mathcal{M}_n$ يتبع النظيم المصفوفاتي المستخدم، ولكنّ مؤثّرات الحساسيّة متكافئة فيما بينها، بمعنى أنّه إذا كان κ و κ' مؤثّري حساسيّة فإنّه يوجد عددان موجبان تماماً c_1 و c_2 بحيث يكون

$$\forall A\in\mathcal{M}_n,\quad c_1\cdot\kappa(A)\le\kappa'(A)\le c_2\cdot\kappa(A).$$

فعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\kappa_2 &\le \kappa_1(A)\le n\cdot\kappa_2(A)\\ \frac{1}{n}\kappa_\infty &\le \kappa_2(A)\le n\cdot\kappa_\infty(A)\\ \frac{1}{n^2}\kappa_1 &\le \kappa_\infty(A)\le n^2\cdot\kappa_1(A)\end{aligned}$$

- ليست هناك علاقة بين القيمة التي يأخذها محدّد المصفوفة وبين حساسيّة هذه المصفوفة كما تبيّن الأمثلة التالية.

أمثـــلة:

❶ لتكن A مصفوفة مربّعة وقطريّة من المرتبة 100 معرّفة كما يلي:

$$\begin{aligned}a_{11}&=1,\\ a_{ii}&=0.1\quad 2\le i\le 100.\end{aligned}$$

لدينا هنا $\begin{cases}\|A\|_2=1\\ \|A^{-1}\|_2=10\end{cases}\Leftarrow \kappa_2(A)=10$، في حين أنّ $\det(A)=1\times10^{-99}=10^{-99}$.

❷ لتكن A مصفوفة مثلّثية من الأعلى وثنائيّة القطريّة معرّفة بالعلاقات:

$$1 \le i, j \le n, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & j = i+1 \\ 0 & else \end{cases}$$

يبرهن أنّ مقلوب هذه المصفوفة هو المصفوفة

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{i-1} & \cdots & (-2)^{n-1} \\ & 1 & -2 & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا في هذه الحالة

$$\begin{aligned} &\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 3, \\ &\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + n^{n-1} = 2^n - 1, \\ &\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = 3 \times 2^n. \end{aligned}$$

بالرغم من كون $\det(A) = 1$.

8. دراسة أثر التشويش في حل جملة معادلات خطيّة

لندرس أولاً حالة التغييرات الناجمة عن تشويش شعاع الطرف الثاني في جملة معادلات خطّية دون أن تتعرّض مصفوفة هذه الجملة لأي تغيير.

مبرهنة 11: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن x و $x + \Delta x$ حَلَّيْ جُمْلَتِي المعادلات الخطيّة:

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ A \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b, \end{cases}$$

عندها تتحقق المتراجحة

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

أياً كان النظيم الشعاعي $\|\cdot\|$، حيث يمثّل العدد $\kappa(A)$ حساسيّة المصفوفة A محسوبةً بالنظيم المصفوفاتي الملحق بهذا النظيم.

الإثبـــات:

بأخذ الفرق بين المعادلتين نجد

$$A \cdot \Delta x = \Delta b$$

ومنه يكون $\Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b$. ومن تعريف النظيم الملحق لدينا

$$\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1} \cdot \Delta b\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|,$$
$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}.$$

بضرب هاتين المتراجحتين، طرفاً في طرف، نحصل على المتراجحة التالية:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$ ■

لنعالج الآن مسألة تشويش عناصر مصفوفة الجملة الخطيّة بدون أن نغيّر الطرف الثاني فيها وذلك من خلال المبرهنة التاليـــة.

مبرهنـــة 12: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن x و $x + \Delta x$ حَلَّيْ جُمْلَتِي المعادلات الخطيّة:

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ (A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b, \end{cases}$$

عندها تتحقق المتراجحة

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

أياً كان النظيم الشعاعي $\|\cdot\|$، حيث يمثّل العدد $\kappa(A)$ حساسيّة المصفوفة A محسوبةً بالنظيم المصفوفاتي الملحق بهذا النظيم.

الإثبـــات:

لدينا

$$A \cdot x = b = (A + \Delta A)(x + \Delta x)$$

ومنه

$$A \cdot \Delta x + \Delta A \cdot (x + \Delta x) = 0$$

ومن ثمّ

$$\Delta x = -A^{-1} \cdot \Delta A \cdot (x + \Delta x).$$

من ذلك نستنتج أنّ

$$\|\Delta x\| = \left\|A^{-1} \cdot \Delta A \cdot (x + \Delta x)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x + \Delta x\|,$$

وهذا يعني أنّ

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| = \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \qquad \blacksquare$$

لننظر في حالة مثال R. S. Wilson الذي بدأنا فيه هذا الفصل. فإذا استعملنا النظيم الشعاعي الإقليدي نجد $\|b\|_2 \approx 60.025$ و $\|\Delta b\|_2 = 0.02$. بحكم كون المصفوفة A متناظرة يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \approx 30.2887 \\ \|A^{-1}\|_2 &= \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\min\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|} \approx \frac{1}{0.01015} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \kappa_2(A) \approx 2984$$

من جهة ثانية، لدينا

$$\left.\begin{aligned} \|x\|_2 &= 2, \\ \|\Delta x\|_2 &\approx 1.64 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \approx 0.82$$

وهذا يساوي تقريباً قيمة الحدّ

$$\kappa_2(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \approx 2984 \times \frac{0.02}{60.025} \approx 0.994.$$

ونذكّر أخيراً بأنّ هذه المصفوفة تتمتّع، إضافةً لكونها متناظرة بكون محدّدها يساوي الـ 1 وأنّ مقلوبها هو

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

لندرس الآن الحالة العامّة المتعلّقة بتشويش عنصري الجملة الخطيّة، أي المصفوفة A وشعاع الطرف الثاني b. نفترض أنّ الجملة الخطيّة المشوّشة تكتب على الشكل

$$\begin{aligned} &(A + \varepsilon \cdot F) \cdot x(\varepsilon) = b + \varepsilon \cdot f, \quad F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}), \quad f \in \mathbb{k}^n, \\ &x(0) = x. \end{aligned}$$

إذا كانت المصفوفة A قلوبة فإنّ التطبيق $\varepsilon \to x(\varepsilon)$ يكون قابلاً للاشتقاق بجوار الصفر ويحقق الشرط $x'(0) = A^{-1} \cdot (f - F \cdot x)$، ومن ثمّ فإنّ عبارة النشر المحدود للتطبيق $\varepsilon \to x(\varepsilon)$ بجوار الصفر تكتب كما يلي:

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon \cdot x'(0) + O(\varepsilon^2) \cdot u, \quad \|u\| = 1.$$

حيث $\|\cdot\|$ نظيمٌ شعاعي ما. باستخدام النظيم المصفوفاتي الملحق به، نحصل من العبارة السابقة على المتراجحة التالية

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \cdot \|A\| \cdot \left\{ \frac{\|f\|}{\|x\|} + \|F\| \right\} + O(\varepsilon^2),$$

من جهةٍ ثانية، لدينا

$$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

ومن ثمّ نحصل على المتراجحة

$$\frac{\|x(\varepsilon)-x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\cdot\left(r_A + r_b\right) + O(\varepsilon^2),$$

حيث

$$r_A = \varepsilon\cdot\frac{\|F\|}{\|A\|}, \qquad r_b = \varepsilon\cdot\frac{\|f\|}{\|b\|}.$$

بالنتيجة، فإننا نلاحظ أنّ الخطأ النسبي في الحل x لا يتجاوز $\kappa(A)$ مرّةً الخطأ النسبي في عناصر الجملة الخطيّة $(r_A + r_b)$. بهذا المعنى، فإنّ عدد الحساسيّة $\kappa(A)$ يقيس لنا حساسيّة الجملة الخطية للتشويشات وهو يمثّل، بناءً على ما سبق، معامل التضخيم الأعظمي للخطأ في الحل.

ملاحظــة هامّة:

هناك خاصّة أخرى هامّة تتعلّق بحساسيّة مصفوفة مربّعة تتلخّص بالعلاقة

$$\frac{1}{\kappa(A)} = \min_{\{E:\det(A+E)=0\}} \frac{\|E\|}{\|A\|} \qquad \textbf{(مبرهنة Gastinel)}$$

تبيّن هذه النتيجة (انظر Kahan 1966) أنّ عدد الحساسيّة $\kappa(A)$ يسمح بقياس المسافة النسبيّة للمصفوفة A عن المصفوفات الغير قلوبة.

في الفقرة التالية، نعرض بعضاً من الخواص التي توضّح أثر تشويش مصفوفة مربّعة في حساب مقلوبها.

9. دراسة أثر التشويش في حساب مقلوب مصفوفة

مبرهنــة 13: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة قلوبة، وليكن $\|\cdot\|$ نظيم مصفوفاتي ملحق و E مصفوفة تحقق

$$\|A^{-1}\cdot E\| = r < 1,$$

عندئذٍ تكون المصفوفة $(A+E)$ قلوبة ويكون

$$\left\|(A+E)^{-1}\right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-r}, \qquad \left\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\right\| \leq \frac{\|E\|\cdot\|A^{-1}\|^2}{1-r}.$$

الإثبـــات:

بما أنّ المصفوفة A قلوبة، يمكننا أن نكتب $A+E=A\cdot(I-F)$ حيث $F=-A^{-1}\cdot E$. من جهةٍ أخرى، لدينا $\|F\|=\|A^{-1}\cdot E\|=r<1$ ومن ذلك نستنتج أنّ المصفوفة $(I-F)$ قلوبة (المبرهنة 8) وأنّ $\left\|(I-F)^{-1}\right\|\leq 1/(1-r)$.

لدينا أيضاً

$$(A+E)^{-1}=(I-F)^{-1}.A^{-1},$$

ومن ثمّ

$$\left\|(A+E)^{-1}\right\|\leq\frac{\|A^{-1}\|}{1-r}.$$

وكذلك

$$(A+E)^{-1}-A^{-1}=-A^{-1}\cdot E\cdot(A+E)^{-1},$$

ومنه

$$\left\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\right\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\left\|(A+E)^{-1}\right\|\leq\frac{\|E\|\cdot\|A^{-1}\|^2}{1-r}.$$ ■

مثـــال

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 4\end{bmatrix}$$

لدينا هنا، $A=4(I+B)$، حيث $\|B\|_\infty=\dfrac{1}{2}$ ومن ثمّ فإنّ $(I+B)^{-1}$ موجودة وبحسب المبرهنة 8 يكون

$$\left\|(I+B)^{-1}\right\|_\infty\leq\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

عندئذٍ لدينا $A^{-1}=\frac{1}{4}(I+B)^{-1}$ ومن ثمّ $\|A^{-1}\|_\infty\leq\dfrac{1}{2}$. ومنه

$$\rho(A)\leq 6\quad,\quad\rho(A^{-1})\leq\frac{1}{2}.$$

أي أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة A تحقق المتراجحة المزدوجة

$$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(A),\quad 2\leq|\lambda|\leq 6.$$

10. مسائل وتمارين

1.10 ليكن

$$u_1 = (1,2,-1)^T, \quad u_2 = (1,1,3)^T.$$

شعاعين متعامدين. عيّن شعاعاً ثالثاً u_3 بحيث تكون الجملة $\{u_1,u_2,u_3\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$. استنتج من ذلك أساساً متعامداً نظامياً.

2.10 ليكن $w \in \mathbb{C}^n$ حيث $\|w\|_2 = \sqrt{w^*w} = 1$. نعرّف المصفوفة المربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ بالعلاقة

$$A = I - 2w \cdot w^*$$

أثبت أنّ المصفوفة A هي مصفوفة هرميتيّة وواحديّة.

3.10 احسب القيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لكلٍّ من المصفوفتين

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.10 لتكن $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة واحديّة.

(a) بيّن أنّه أياً كان الشعاع x من الفضاء $\mathbb{C}^n$ فإنّ $\|U \cdot x\|_2 = \|x\|_2$.

(b) أثبت أنّ

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \quad \langle U \cdot x, U \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

تبيّن هذه العلاقة أنّ التحويلات الواحديّة تحافظ على الزوايا بين الأشعّة في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

(c) بيّن أنّ لجميع القيم الذاتيّة لمصفوفة واحديّة طويلة تساوي 1.

5.10 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة هرميتيّة. بيّن أنّ A تكون مصفوفة معرّفة موجبة إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها الذاتيّة حقيقيّة وموجبة تماماً.

6.10 ليكن الشعاع $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$، نعرّف المصفوفة $A = y \cdot y^T$. بيّن أنّ $\lambda = 0$ هي قيمة ذاتيّة درجة مضاعفتها $n-1$. ما هي القيمة الذاتيّة الوحيدة غير المعدومة لهذه المصفوفة؟

7.10 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن $\|\cdot\|_v$ نظيماً شعاعياً في الفضاء $\mathbb{C}^n$. نعرّف

$$\|x\|_* = \|A \cdot x\|_v, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

بيّن أنّ $\|\cdot\|_*$ هو نظيمٌ شعاعي في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

8.10. برهن أنّ

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} = \max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

يبرّر هذا استخدام الرمز $\|x\|_\infty$ للدلالة على المقدار في الطرف اليميني من العلاقة.

9.10. برهن أنّه أياً كان النظيم المصفوفاتي $\|\cdot\|$ فإنّ

$$(a) \quad \|I\| \ge 1,$$
$$(b) \quad \|A^{-1}\| \ge 1/\|A\|.$$

10.10. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. عيّن القيم والأشعّة الذاتيّة للمصفوفة:

$i)$ $A+\alpha I$ حيث α عدد ثابت،

$ii)$ A^{-1} إذا افترضنا أنّ A مصفوفة قلوبة،

$iii)$ A^m $(m \ge 2)$ بدلالة القيم والأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A .

11.10 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) بيّن أنّه أياً كانت المصفوفة الواحديّة U فإنّ

$$\|A\cdot U\|_F = \|U\cdot A\|_F = \|A\|_F$$

(b) إذا كانت A مصفوفة هرميتية أثبت أنّ

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2}$$

حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ هي القيم الذاتيّة للمصفوفة A . وبيّن صحّة المتراجحة المزدوجة

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F .$$

12.10. برهن أنّه إذا كانت Q مصفوفة متعامدة فإنّ

$$\forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \kappa_2(Q\cdot A) = \kappa_2(A).$$

13.10. لتكن A و B مصفوفتان متناظرتان ومعرفتان موجبتان. برهن أنّ

$$\kappa_2(A+B) \le \max\left(\kappa_2(A),\kappa_2(B)\right).$$

14.10. برهن أنّه في المبرهنة 12 يمكن اختيار مصفوفتين A و ΔA وشعاع طرف ثان b بحيث تتحقق المساواة:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|}=\kappa\,(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

15.10. لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{-6}\end{bmatrix}\quad,\quad \Delta A=\begin{bmatrix}10^{-8} & 0\\ 0 & 10^{-14}\end{bmatrix}.$$

نضع $A\cdot x=(A+\Delta A)\cdot(x+\Delta x)$.

أولاً: احسب $\kappa_2(A)$ وعيّن قيمة النسبة $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$.

ثانيـــاً: عيّن قيمة الخطأ النسبي في الحل $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$. قارن ذلك مع المقدار $\kappa_2(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$.

ثالثـــاً: لتكن المصفوفة $D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{6}\end{bmatrix}$.

- عيّن المصفوفتين $D\cdot A$ و $D\cdot\Delta A$ واحسب قيمة $\kappa_2(D\cdot A)$.
- قارن النسبة $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ مع المقدار $\kappa_2(D\cdot A)\cdot\frac{\|D\cdot\Delta A\|_2}{\|D\cdot A\|_2}$. ماهو استنتاجك؟

16.10. لتكن A مصفوفة قلوبة. برهن أنّه أياً كانت المصفوفة المربّعة B فإنّ

$$\frac{\|AB-I\|_2}{\|BA-I\|_2}\leq\kappa_2(A),$$

وبرهن أنّه توجد مصفوفات B تتحقق من أجلها المساواة.

✧ ✧ ✧