الفصل الثالث
الطرائق المباشرة في حلّ جُمَل المعـــادلات الخَطيّـــة

لتكن جملة المعادلات الخطّية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

حيث الأمثال a_{ij} ، b_j هي أعدادٌ معطاة. نرمز إلى هذه المعادلات ، على الترتيب، بالكتابة $E_1, \ldots, E_n$. نبحث عن الحل المشترك $x_1, \ldots, x_n$ لهذه المعادلات. في أغلب الأحيان نستخدم الكتابة المصفوفاتيّة في التعبير عن جملة المعادلات

$$A \cdot x = b \tag{2}$$

نعلم أنّ جملة المعادلات (2) تقبل حلاً وحيداً إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$.

يقوم مبدأ الطرائق التي سنعرضها في هذا الفصل على تعيين مصفوفة مربّعة قلوبة M بحيث تكون المصفوفة $M \cdot A$ مثلّثية من الأعلى (أو مثلّثية من الأسفل). ومن ثمّ نقوم بحلّ جملة المعادلات الخطّية المكـــافئة (تقبل مجموعة الحلول ذاتها)

$$M \cdot A \cdot x = M \cdot b$$

بطريقة التعويض. ويشكّل هذا المبدأ أساس الطرائق التاليـــة:

- طريقة غاوص Gauss (في حالة مصفوفات عامّة)،
- طريقة شولسكي Choleski (في حالة مصفوفات متناظرة معرّفة موجبة)،
- طريقة هاوس هولدر Householder (تفريق مصفوفة مربّعة إلى جداء مصفوفة متعامدة Q بمصفوفة مثلثية R من الأعلى: التفريق QR).

1. طريقة غاوص *Gauss method*

لتكن لدينا جملة المعادلات (1) ولنفترض أنّ $\det(A) \neq 0$. إذا كان $a_{11} \neq 0$، فإنّه من الممكن حذف المجهول x_1 من المعادلات الثانية، الثالثة،...، إلى الأخيرة باستعمال المعادلة الأولى، كما يلي:

نضع
$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \ldots, n$$

ونجري على المعادلة E_i التحويل التـــالي

$$E_i \leftarrow E_i - m_{i1} * E_1$$

وبنتيجة هذا التحويل نحصل على جملة المعادلات المكافئة التالية

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \tag{3}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j}, & a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - m_{i1}a_{1j} \\ b_1^{(1)} &= b_1, & b_i^{(1)} &= b_i - m_{i1}b_1 \end{aligned}\right\} \quad i = 2, \ldots, n$$

نرمز بـــ $A^{(1)}$ إلى مصفوفة الجملة (3) و بـــ $b^{(1)}$ إلى شعاع الطرف الثاني في هذه الجملة.

في الحالة التي يكون فيها $a_{11} = 0$، نبدّل المعادلة E_1 بمعادلةٍ E_i يكون فيها $a_{i1} \neq 0$، وهذا ممكنٌ على الدوام لأنّنا افترضنا $\det(A) \neq 0$.

الآن، إذا نظرنا إلى جملة المعادلات (3) فإننا نلاحظ أنّ المعادلات $E_2, \ldots, E_n$ تشكّل بدورها جملة معادلات خطيّة بالمجاهيل $x_2, \ldots, x_n$. فهي جملة-جزئيّة بعدها $(n-1)$ نستطيع أن نطبّق عليها المعالجة السابقة ذاتها ونحذف بذلك المجهول x_2 من المعادلات $E_3, \ldots, E_n$. من الناحية العمليّة نضرب المعادلة E_2 من جملة المعادلات (3) بالعدد $m_{i2} = a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ ونطرحها من المعادلة E_i $(3 \leq i \leq n)$. بتكرار هذه المعالجة نحصل على الجُمَل الخطيّة المتكافئة

$$(A, b) \to (A^{(1)}, b^{(1)}) \to (A^{(2)}, b^{(2)}) \to \cdots \to (A^{(n-1)}, b^{(n-1)}) \equiv (R, c)$$

ويؤول حلّ الجملة الخطيّة (1) إلى حل الجملة المثلثيّة التالية

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \cdots + r_{1n}x_n &= c_1 \\ r_{22}x_2 + \cdots + r_{2n}x_n &= c_2 \\ \ddots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ r_{nn}x_n &= c_n \end{aligned} \tag{4}$$

والتي نستطيع حلّها بسهول "**بطريقة التعويض**" كما يلي

$$(5)\qquad \begin{cases} x_n = c_n / r_{nn}, \\ x_i = (c_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j) / r_{ii} \qquad i = n-1, \dots, 1. \end{cases}$$

1.1. تحويل غاوص

ليكن $c^T = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ بحيث تكون المركّبة $c_k \neq 0$. نعرّف الشعاع

$$\tau^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tau_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ \tau_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \tau_i^{(k)} = \frac{c_i}{c_k}, \qquad k+1 \le i \le n.$$

نضع

$$M_k = I_n - \tau^{(k)} \cdot e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\tau_{k+1}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\tau_n^{(k)} & & & 1 \end{bmatrix}$$

عندها، نجد أنّ

$$M_k \cdot x = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعرّف المصفوفة M_k ما يسمّى بتحويل غاوص، كما يسمّى الشعاع $\tau^{(k)}$ شعاع غاوص.

مثـــال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

لدينا هنا

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix},$$

وكذلك

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 \cdot (M_1 \cdot A) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. خوارزميّة غاوص

في الحالة العامّة، نستعمل طريقة حذف المجاهيل في حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$ مصفوفتها A قلوبة. هذا ما يعرف باسم خوارزميّة غاوص وهي كالآتي:

Algorithm ***{Gauss Method}***

Begin

Step 1: *Put* $B = [A, b] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Step 2: *For k=1 to n-1 do*

- *Find* $\ell \in \{k, \ldots, n\}$ *so that* $|B_{\ell,k}| = \max_{j \geq k} |B_{j,k}|$

  And permute line k and line ℓ *.*

- *For i=k+1 to n do*

  For j=k to n+1 do $B_{i,j} \leftarrow B_{i,j} - B_{i,k} / B_{k,k} \cdot B_{k,j}$

Step 3: *Solve the obtained triangular system:*

$x_n \leftarrow B_{n,n+1} / B_{n,n}$

For i=n-1 downto 1 do $x_i \leftarrow \dfrac{1}{B_{i,i}} \left(B_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j \right)$

End.

ملاحظة: تمثّل المرحلة الثانية من خوارزميّة غاوص السابقة **استراتيجيّة البحث الجزئي** عن المرتكز القطري Pivot، أي البحث عن أفضل عنصر (أكبر العناصر بالقيمة المطلقة) من بين العناصر الواقعة تحت القطر في العمود الذي يجري فيه الحذف.

مثـــال: لتكن الجملة الخطّية

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

بتطبيق الخوارزميّة السابقة نحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2/3 & 1/3 & -1 & 17/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ 2/3 & 1/2 & -1/2 & 4 \end{array}\right]$$

ومن ثمّ تؤول جملة المعادلات إلى الجملة المكافئة

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10/3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$x_3 = -8, \quad x_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3} + x_3\right) = -7, \quad x_1 = \frac{1}{3}(2 - x_2 - 6x_3) = 19.$$

من جهةٍ ثانية، لدينا هنا

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وحسب ما رأينا سابقاً فإنّ المصفوفة $P \cdot A$ تقبل التفريق $P \cdot A = L \cdot R$ حيث

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ & 2/3 & -1 \\ & & -1/2 \end{bmatrix}.$$

.3.1 التفريق LR

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. رأينا فيما سبق أنّه يمكن إرجاع هذه المصفوفة إلى الشكل المثلّثي (بتبديلٍ مسبق لأسطر المصفوفة A إنْ لزم الأمر) باستخدام تحويلات غاوص. توضّح المبرهنتين التاليتين الخواص المتعلّقة بهذا التفريق.

مبرهنـــة 1: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. إنّ تطبيق خوارزميّة غاوص في حل جملة المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ تسمح بتعيين التفريق المصفوفاتي التالي

$$P \cdot A = L \cdot R \tag{6}$$

حيث P هي مصفوفة تبديل، L و R مصفوفتان مثلثيّتان من الشكل

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

نسمّي الصيغة (6) تفريق LR (Left-Right) للمصفوفة A.

الإثبـــات:

لنفترض أنّنا أجرينا مسبقاً جميع التباديل الضروريّة لترتيب معادلات الجملة الخطيّة بحيث لا نحتاج عند إجراء عمليّة حذف المجاهيل إلى أي تبديل. عندئذٍ، باستخدام تحويلات غاوص

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

نستطيع التعبير عن مراحل الحذف في خوارزميّة غاوص كما يلي

$$M_1 A = A^{(1)}, \quad M_2 A^{(1)} = A^{(2)}, \quad \cdots \quad , M_{n-1} A^{(n-2)} = A^{(n-1)} = R.$$

ومن ثمّ يكون

$$(M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \ldots \cdot M_1) \cdot A = R \quad \Leftrightarrow \quad A = (M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \ldots \cdot M_1)^{-1} \cdot R$$

بقي أن نبرهن أنّ المصفوفة L في العلاقة (6) تساوي $(M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \ldots \cdot M_1)^{-1}$. نطبّق تحويلات الحذف M_1، M_2 ، … ، M_{n-1} على المصفوفة L فتحذف بذلك العناصر تحت القطر ونحصل على المصفوفة المطابقة، أي أنّ $(M_1 \cdot M_2 \cdots M_{n-1}) \cdot L = I$ وهو المطلوب. ■

مبرهنـــة 2: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. نعرّف المصفوفات المربّعة $\Delta_k = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$.

أوّلاً: إذا تحققت الشروط $\{\det(\Delta_k) \neq 0,\ 1 \le k \le n-1\}$ فإنّ المصفوفة A تقبل تفريقاً LR.

ثانيــاً: إذا كانت المصفوفة A قلوبة وكانت تقبل تفريقاً LR فإنّ هذا التفريق يكون وحيداً ويحقّق

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} r_{kk}.$$

الإثبــات:

أولاً: إذا كان $a_{11} \neq 0$ فإنّ تحويل غاوص M_1 يكون معرّفاً. لنبرهن الآن أنّه إذا كانت تحويلات غاوص $M_1, \ldots, M_{k-1}$ معرّفة فإنّ تحويل غاوص M_k يكون معرّفاً أيضاً. لدينا

$$A^{(k-1)} = M_{k-1} \cdot \cdots \cdot M_1 \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k-1)} & \times & \cdots & \times \\ & & \times & \cdots & \cdots & \times \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & \times & \cdots & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

عندئذٍ، يكون

$$\det(\Delta_k) = a_{11}^{(k-1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)} \neq 0,$$

ومنه نستنتج أنّ $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. ومن ثمّ يكون تحويل غاوص M_k معرّفاً أياً كان $1 \le k \le n-1$.

ثانيــاً: نفترض أنّ المصفوفة القلوبة A تقبل تفريقين LR هما:

$$A = L_1 \cdot R_1 \quad , \quad A = L_2 \cdot R_2$$

عندها يكون بالضرورة $L_2^{-1} \cdot L_1 = R_2 \cdot R_1^{-1}$. المصفوفة $L_2^{-1} \cdot L_1$ مثلّثيّة من الأسفل عناصر قطرها الرئيس $\left(L_2^{-1} \cdot L_1\right)_{kk} = 1$، في حين أنّ المصفوفة $R_2 \cdot R_1^{-1}$ مثلّثيّة من الأعلى. من ذلك نستنتج أنّ

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = R_2 \cdot R_1^{-1} = I_n.$$

وبالتالي يكون

$$L_1 = L_2 \quad , \quad R_1 = R_2.$$

أخيراً، تقتضي المساواة $A = L \cdot R$ أن يكون

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(R) = \det(R) = \prod_{k=1}^{n} r_{kk}. \qquad \blacksquare$$

ملاحظــات

① توجد مصفوفات قلوبة لا تقبل تفريقاً LR . فعلى سبيل المثال، المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

② تتجلّى فائدة وجود تفرق LR لمصفوفة A عندما تطرح مسألة حل عدّة جُملٍ خطّية لها المصفوفة ذاتها: في هذه الحالة، يبرهنُ التكافؤ التالي

$$A \cdot x = b \xleftrightarrow{A=L\cdot R} \begin{cases} L \cdot y = b, \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

أنّه يكفي ايجاد تفريق LR للمصفوفة A ومن ثمّ حلّ جملة المعادلتين $L \cdot y = b$ و $R \cdot x = y$ لكلّ قيمةٍ معطاة لشعاع الطرف الثاني b.

③ يسمح التفريق $P \cdot A = L \cdot R$ بحساب مُحَدّد المصفوفة المربّعة A وذلك لأنّ

$$\det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$$

وبما أنّ $\det(P) = (-1)^{\sigma}$ حيث σ هو عدد التباديل المطبّقة أثناء تنفيذ خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل، ومن ثمّ يكون

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} \cdot r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}.$$

④ يمكن حساب كلفة تطبيق خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل والإرجاع إلى الشكل المثلّثي كما يلي:

نحتـــاج تطبيق تحويل غاوص على العمود الأول M_1 (الانتقال من A إلى $A^{(1)}$) إلى

$n-1$ عمليّة قسمة،

$(n-1)^2$ عمليّة ضرب وجمع،

وكذلك الأمر، فإنّ تطبيق تحويل غاوص M_2 يتطلّب

$n-2$ عمليّة قسمة،

$(n-2)^2$ عمليّة ضرب وجمع،

وهكذا، تكون الكلفة الاجماليّة لتطبيق خوارزميّة غاوص في الحذف (أو كلفة عمليّة التفريق LR) معطاة بالمجموع:

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 \approx \int_0^n x^2 \,\mathrm{d}\, x = \frac{n^3}{3} \; operations.$$

حيث تمثّل الواحدة $operation$ عمليّة مركّبة (**عمليّة ضرب وعمليّة جمع**)، أي:

$$operation = multiplication + addition.$$

وبالنسبة لتطبيق تحويلات غاوص على الطرف الثاني، فإنّ الانتقال من b إلى $b^{(1)}$ يتطلّب $(n-1)$ عمليّة مركّبة، ومن ثمّ، فإننا نحصل على شعاع الطرف الثاني c بكلفة تقديرية تساوي

$$(n-1) + \cdots + 2 + 1 \approx n^2 / 2 \; operations.$$

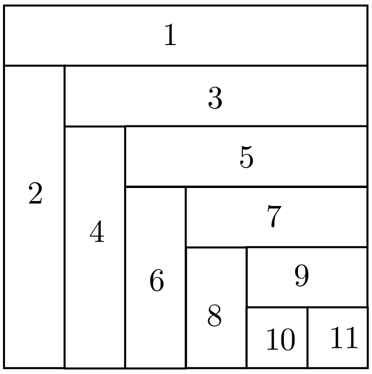
وعلى نحوٍ مشابه، فإنّ تطبيق طريقة التعويض (5) -لايجاد حل جملة المعادلات- يتطلّب $n^2 / 2$ عمليّة مركّبة.

⑤ إذا كانت مصفوفة مربّعة A تقبل تفريقاً LR، فإنّه يمكن النظر إلى عمليّة تعيين هذا التفريق كعمليّة حلّ n^2 معادلة بـــ n^2 مجهول: $\{\ell_{ik} : k < i \ , \ r_{ik} : k \geq i\}$ وهذه المعادلات هي:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{\min(i,k)} \ell_{ij} \cdot r_{jk} \quad , \quad (\ell_{ii} = 1)$$
$$1 \leq i, j \leq n.$$

وهذا أساس ما يعرف باسم طريقة Crout وكذلك طريقة Banachiewicz في تعيين المصفوفتين L و R.

- **طريقة Crout**: وتستخدم المسح سطر-عمود كما يوضّح الشكل التـــالي



نعيّن وفق هذه الطريقة عناصر التفريق $(\ell_{ki})_{k>i}$ و $(r_{ik})_{k\geq i}$ كالآتي:

- $a_{1i} = \sum_{j=1}^{1} \ell_{1j} \cdot r_{ji} \quad \Rightarrow \quad r_{1j} = a_{1i}, \quad 1 \leq i \leq n,$
- $a_{i1} = \sum_{j=1}^{1} \ell_{ij} \cdot r_{j1} \quad \Rightarrow \quad \ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n,$
- $a_{2i} = \sum_{j=1}^{2} \ell_{2j} \cdot r_{ji} \quad \Rightarrow \quad r_{2i} = a_{2i} - \ell_{21} \cdot r_{1i}, \quad 2 \leq i \leq n,$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

وبوجهٍ عام، تكتب **خوارزميّة Crout** كما يلي:

Algorithm ***{Crout Method}***

Begin

For i=1 to n do

begin

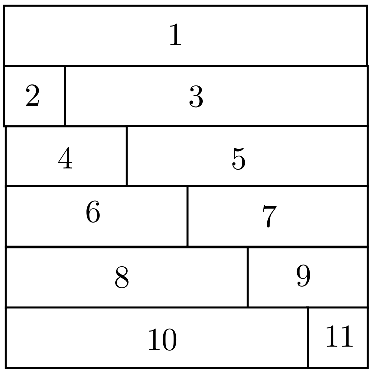
for k=i to n do $r_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} \cdot r_{jk}$

for k=i+1 to n do $\quad \ell_{ki} = \dfrac{1}{r_{ii}}\left(a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{kj} \cdot r_{ji}\right)$

end;

End.

- **طريقة Banachiewicz**: وتستخدم المسح سطر-سطر كما يوضّح الشكل التـــالي



4.1. اختيار المرتكز القطري *Pivot*

تصادفنا، في بداية عمليّة حذف المجاهيل في طريقة غاوص، مسألة اختيار معادلة يكون فيها $a_{i1} \neq 0$ ؛ نسمّي هذا العنصر "**المرتكز القطري**" والذي بواسطته نتمكّن من حذف المجهول x_1 من بقيّة المعادلات. يلعب اختيار عنصر الارتكاز القطري دوراً هاماً في **دقّة الناتج العددي للحساب بالنقطة العائمة القياسيّة**.كما يوضّح المثال الآتي.

مثـــال: (Forsythe)

لتكن جملة المعادلتين

$$\begin{aligned} 1.00\times10^{-4}\cdot x_1 + 1.00\cdot x_2 &= 1.00 \\ 1.00\cdot x_1 + 1.00\cdot x_2 &= 2.00 \end{aligned} \tag{7}$$

والتي تقبل حلاً معطى بالعلاقات

$$x_1 = \frac{1}{0.9999} = 1.000010001\cdots, \qquad x_2 = \frac{0.9998}{0.9999} = 0.99989998\cdots$$

لنطبّق طريقة غاوص في الحذف ولنفترض أننا ننفّذ ذلك مستخدمين نظاماً حاسوبياً تمثّل الأعداد فيه بالنقطة العائمة بدقّة ثلاثة أرقام (أرقام معنويّة) بالنظام العشري. لنناقش الحالتين التاليتين:

a) لنأخذ $a_{11} = 1.00\times10^{-4}$ كمرتكز قطري، عندها يكون

$$\ell_{21} = a_{21} \,/\, a_{11} = 1.00 \times 10^4$$
$$a_{22}^{(1)} = 1.00 - 1.00 \times 10^4 \doteq -1.00 \times 10^4$$
$$b_2^{(1)} = 2.00 - 1.00 \times 10^4 = -1.00 \times 10^4$$

ومن ثمّ يكون

$$x_2 = b_2^{(1)} \,/\, a_{22}^{(1)} = 1.00 \ \ (\text{تماماً})$$

ولكن بالنسبة لــ x_1 نحصل على القيمة

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2)\,/\,a_{11} = (1.00 - 1.00 * 1.00)\,/(1.00 \times 10^{-4}) = 0.$$

نلاحظ هنا أنّ قيمة x_1 التي حصلنا عليها هنا خاطئة تمـــاماً !.

b) الآن، نقوم بتبديل المعادلتين في (7)، فيصبح عندئذٍ المرتكز القطري 1.00 وتعطي عمليّة حذف غاوص القيم التـــالية:

$$\ell_{21} = 1.00 \times 10^{-4},$$
$$a_{22}^{(1)} = 1.00 - 1.00 \times 10^{-4} = 1.00,$$
$$b_2^{(1)} = 1.00 - 2.00 * 1.00 \times 10^{-4} = 1.00.$$

ومن جديد، نحصل على

$$x_2 = b_2^{(1)} \,/\, a_{22}^{(1)} = 1.00$$

ولكن، هذه المرّة تكون قيمة x_1 كما يلي

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2)\,/\,a_{11} = (2.00 - 1.00 * 1.00)\,/\,1.00 = 1.00.$$

نلاحظ هنا أنّ قيم كلّ من x_2 وكذلك x_1 تمثّل تقريباً جيّداً للحلّ.

2. طريقة شولسكي *Choleski method*

لندرس طريقة غاوص في الحالة الخاصّة التي تكون فيها المصفوفة A:

- متنـــاظرة أيْ $A^T = A$،
- معرّفـــة موجبـــة أيْ $x^T \cdot A \cdot x > 0$ أياً كان الشعاع $x \neq 0$.

توضّح المبرهنة التالية، أنّه لا حاجة، في هذه الحالة، إلى إجراء البحث عن عناصر الارتكاز القطري في خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل.

مبرهنـــة 3: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة. عندئذٍ:

1°) تقبل المصفوفة A تفريقاً LR،

2°) يتمتّع التفريق $A = L \cdot R$ بالخاصّـــة

$$R = D \cdot L^T, \quad D = \operatorname{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn}). \tag{8}$$

الإثبـــات:

1°) لدينـــا هنا $a_{11} = e_1^T \cdot A \cdot e_1 > 0$ حيث $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$، وذلك لكون المصفوفة A معرّفة موجبة. ومن ثمّ يمكن اختيار العنصر a_{11} كمرتكز قطري في المرحلة الأولى من طريقة غاوص:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ a & C \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C^{(1)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

حيث

$$c_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \qquad 2 \le i, j \le n.$$

أو، بشكلٍ مكافئ

$$C^{(1)} = C - \frac{1}{a_{11}} \cdot a \cdot a^T.$$

من الواضح أنّ المصفوفة $C^{(1)}$ متناظرة. لنبرهن أنّها أيضاً معرّفة موجبة:

نفترض أنّ $y \in \mathbb{R}^{n-1}$، $y \neq 0$. يجب أن نثبت صحّة المتراجحة $y^T \cdot C^{(1)} \cdot y > 0$. بالاستفادة من الكتابة (9) ومن كون المصفوفة A معرّفة موجبة نستطيع أن نكتب

$$(x_1, y^T) \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ a & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = a_{11} x_1^2 + 2 x_1 \cdot y^T a + y^T \cdot C \cdot y > 0.$$

فإذا وضعنا $x_1 = -y^T a \,/\, a_{11}$ في المتراجحة السابقة نجد

$$y^T C^{(1)} y = y^T C y - \frac{1}{a_{11}} (y^T a)^2 > 0.$$

وبالتدريج، نجد أنّ المرحلة الثانية وكذلك المراحل الأخرى من طريقة غاوص في حذف المجاهيل قابلة للتنفيذ دون البحث عن مرتكز قطري جديد.

2°) العلاقة (8) هي نتيجة من وحدانيّة التفريق LR لمصفوفة قلوبة. في الواقع، إذا عرّفنا $\hat{L} = R^T \cdot D^{-1}$ فإننا نحصل على المطابقة التالية

$$A = A^T = R^T \cdot L^T = \hat{L} \cdot (D \cdot L^T),$$

ومن ثمّ نستنتج من وحدانيّة التفريق LR أنّ $L = \hat{L}$. ■

ملاحظـــة هـــامة: بما أنّ العناصر $0 < r_{ii}$ (المصفوفة A معرّفة موجبة)، فإنّه يمكن تعريف المصفوفة

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{r_{11}}, \ldots, \sqrt{r_{nn}}),$$

ومن ثمّ يؤول التفريق $A = L \cdot D \cdot L^T$ إلى الشكل

$$A = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$$

نضع $B = L \cdot D^{1/2}$، فنحصل على التفريق

$$A = B \cdot B^T \tag{10}$$

والذي يسمّى **تفريق شولسكي** للمصفوفة A. حيث

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

بمقارنة طرفي المطابقة $A = B \cdot B^T$ نجد.

$$\left.\begin{aligned} i = k: \quad & a_{kk} = b_{k1}^2 + b_{k2}^2 + \cdots + b_{kk}^2 \\ i > k: \quad & a_{ik} = b_{i1}b_{k1} + \cdots + b_{ik}b_{kk} \end{aligned}\right\}, \quad 1 \le k \le n.$$

ومنه نستنتج **خوارزميّة شولسكي** في تفريق مصفوفة **متناظرة معرّفة موجبة**:

Algorithm {Choleski Method}

Begin

for k=1 to n do

begin

$$b_{kk} \leftarrow \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj}^2}\ ;$$

for i=k+1 to n do $\quad b_{ik} \leftarrow \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij}b_{kj}\right) / \, b_{kk}.$

end;

End.{Choleski}

فيما يتعلّق بكلفة خوارزميّة شولسكي، فيمكن تقدير عدد العمليّات الحسابيّة الأساسيّة (مع إهمال الـــ n عمليّة جذر تربيعي) اللازمة كما يلي:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cdot k \approx \int_0^n (n-x)x\,\mathrm{d}\,x = \frac{n^3}{6}.$$

وهذا يوافق نصف كلفة تعيين التفريق LR التي رأيناها سابقاً.

3. طريقة المربّعات الصغرى في حل جمل المعادلات الخطيّة

لتكن جملة المعادلات الخطّية

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 &+ a_{12}\cdot x_2 &+ \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1\\ a_{21}\cdot x_1 &+ a_{22}\cdot x_2 &+ \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2\\ \vdots\quad & \quad\vdots & \vdots\quad & \quad\vdots\\ a_{m1}\cdot x_1 &+ a_{m2}\cdot x_2 &+ \cdots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned} \tag{11}$$

حيث $n \le m$. تكتب هذه الجملة مصفوفاتياً على الشكل

$$\begin{aligned} &A\cdot x = b,\\ &A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad b\in\mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

بوجهٍ عام، لا تملك جملة المعادلات (11) حلولاً. تكمن الفكرة في طرح هذه المسألة في البحث عن شعاعٍ x يحقق الخاصّة التالية:

$$\|A\cdot x - b\|_2 = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\|A\cdot y - b\|_2 \tag{12}$$

يدلّ اسم "**مسألة التربيعات الصغرى**" على اختيار النظيم الاقليدي لقياس خطأ التقريب (يجب أن يكون مجموع مربّعات الأخطاء أصغرياً).

مبرهنـــة 4: لتكن $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$، حيث $n\le m$ وليكن $b\in\mathbb{R}^m$. يكون الشعاع $x\in\mathbb{R}^n$ حلاً للمسألة (12) **إذا وفقط إذا** كان x حلاً لجملة المعادلات الخطّية

$$A^TA\cdot x = A^Tb. \tag{13}$$

الإثبـــات: إذا كان $z\in\mathbb{R}^n$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنّ

$$\|A(x+\alpha z)-b\|_2^2 = \|Ax-b\|_2^2 + 2\alpha\cdot z^T\cdot A^T(Ax-b) + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2$$

- **لزوم الشرط**: إذا كان الشعاع $z=-A^T(Ax-b)$ غير معدوم فإنّ المقدار

$$2\alpha\cdot z^T\cdot A^T(Ax-b) + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2 = -2\alpha\cdot z^T\cdot z + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2$$

يكون ذا إشارة سالبة عندما تكون قيمة الوسيط α صغيرةً بالقدر الكافي وعندها يكون

$$\|Ax-b\|_2 < \|A(x+\alpha z)-b\|_2$$

وهذا يتعارض مع افتراض x حلٌ للمسألة (12).

- **كفاية الشرط**: إذا كان x يحقق الشرط (13) فإنّ

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \|A(x+\alpha z)-b\|_2^2 = \|Ax-b\|_2^2 + \alpha^2 \cdot \|Az\|_2^2$$

ومن ثمّ يكون

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\cdot x-b\|_2 \le \|A\cdot y-b\|_2$$

أي أنّ x حلٌ للمسألة (12) وهو المطلوب. ■

❖ **التمثيل الهندسي**: تشكّل المجموعة $E=\{Ay : y\in\mathbb{R}^n\}$ فضاءً شعاعياً خطيّاً جزئياً من الفضاء $\mathbb{R}^m$. إذا كان $b\in\mathbb{R}^m$ شعاعاً اختيارياً، فإنّ الشعاع $x\in\mathbb{R}^n$ يكون حلاً للمسألة (12) **إذا وفقط إذا** كان العنصر Ax هو المسقط العمودي للشعاع b على الفضاء E. هذا يعني أنّ

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (A\cdot x-b)\perp A\cdot y.$$

نستنتج من ذلك أنّ $A^T(Ax-b)=0$. وبهذا نكون قد أثبتنا مرّة أخرى **المبرهنة 4**.

ملاحظـــة: تمتلك جملة المعادلات (13) **دوماً** (وعلى الأقل) حلاً، وذلك لأنّ **المسقط العمودي** للشعاع b على الفضاء E **موجودٌ دائماً**. من جهة ثانية، المصفوفة A^TA متناظرة و**شبه معرّفة موجبة** $(x^TA^TAx=\|Ax\|^2\ge 0)$، وتكون **معرّفة موجبة** إذا كانت **أشعّة الأعمدة في المصفوفة** A **مستقلّة خطياً**، أيْ:

$$\forall x\neq 0, \quad A\cdot x\neq 0.$$

وفي هذه الحالة، يمكننا استخدام خوارزميّة شولسكي لحل جملة المعادلات (13). ولكن غالباً، ما يجري ايجاد الحلّ مباشرةً من المسألة (12) دون استعمال المعادلات (13).

4. تفريق QR للمصفوفات المربّعة

رأينا في طريقة غاوص كيف أدى ضرب الجملة الخطيّة $A\cdot x=b$ بالمصفوفة $M_{n-1}\cdot\ldots\cdot M_2\cdot M_1$ إلى تحويل هذه الجملة إلى الجملة المكافئة $R\cdot x=c$ حيث R هي مصفوفة مثلثيّة من الأعلى.

لحلّ مسألة التربيعات الصغرى (12) نبحث عن مصفوفة متعامدة $Q\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ بحيث يكون

$$Q^T(Ax-b)=\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}x-\begin{pmatrix}c\\c'\end{pmatrix}$$

حيث $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مثلثيّة من الأعلى، ويمثّل الشعاع $(c,c')^T$ تجزئةً للشعاع Q^Tb حيث $c \in \mathbb{R}^n$ ، $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$. وبما أنّ التحويلات المتعامدة تحافظ على النظيم الاقليدي يكون لدينا

$$\|Ax-b\|_2^2 = \left\|Q^T \cdot (Ax-b)\right\|_2^2 = \|Rx-c\|_2^2 + \|c'\|_2^2 . \tag{14}$$

ومن ثمّ، فإنّ ايجاد حلٍ للمسألة (12) يؤول إلى حل الجملة الخطّيّة

$$R \cdot x = c.$$

بوجه عام، نبحث عند حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$ عن مصفوفة Q متعامدة (أي $Q^TQ = I$) وعن مصفوفة مثلثيّة من الأعلى R بحيث يكون $Q^T \cdot A = R$ أو بشكلٍ مكافئ

$$A = Q \cdot R$$

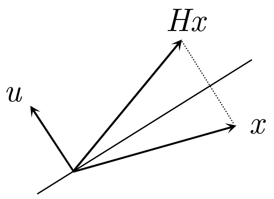
تسمّى الكتابة الأخيرة "**تفريق** QR **للمصفوفة** A"

❖ انعكاسات هاوسهولدر (1958):

ليكن $u \in \mathbb{R}^n$ يحقق الشرط $u^Tu = 1$. نسمّي مصفوفة هاوسهولدر Householder الموافقة للشعاع u المصفوفة المعرّفة بالعلاقة:

$$H = I - 2u \cdot u^T \tag{15}$$

تتمتّع مصفوفات هاوسهولدر بالخواص التـــالية:



1°) H هي انعكاس بالنسبة للمستوي $\{x : u^Tx = 0\}$، لأنّ:

$$\left(H \cdot x = x - u \cdot (2u^Tx)\right) \wedge \left((H \cdot x + x) \perp u\right)$$

2°) H مصفوفة متناظرة،

3°) H مصفوفة متعامدة، لأنّ

$$H^TH = (I-2uu^T)^T(I-2uu^T) = I - 4uu^T + 4uu^Tuu^T = I.$$

نعرض في الفقرة التالية طريقةً تستخدم تحويلات هاوسهولدر في إرجاع مصفوفة مربّعة إلى الشكل المثلّثي.

❖ خوارزميـــة Householder-Businger-Golub

⌖ **في المرحلة الأولى**، نبحث عن مصفوفة هاوسهولدر

$$H_1 = I_m - 2u_1u_1^T, \quad u_1 \in \mathbb{R}^m, \quad u_1^Tu = 1.$$

بحيث يكون

$$H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}. \tag{16}$$

فإذا رمزنا بـــ A_1 للعمود الأوّل في المصفوفة A، يكون لدينا $H_1A_1 = \alpha_1 e_1 = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)^T$ ويكون أيضاً $|\alpha_1| = \|H_1A_1\|_2 = \|A_1\|_2$. كما أنّ الشكل الخاص للمصفوفة H_1 يقتضي أن يكون

$$H_1A_1 = A_1 - 2u_1 \cdot u_1^T A_1 = \alpha_1 e_1.$$

نلاحظ هنا أنّ المقدار $u_1^T A_1$ هو عددٌ سلميّ. نستنتج من ذلك أنّ

$$u_1 = \lambda \cdot v_1 \quad , \quad v_1 = A_1 - \alpha_1 e_1$$

يعيّن الثابت λ من الشرط $\|u_1\|_2 = 1$. وبما أنّنا نملك حريّة اختيار إشارة العدد α_1 فإننا نختار

$$\alpha_1 = -\operatorname{sign}(a_{11}) \cdot \|A_1\|_2 \tag{17}$$

لتجنّب عمليّة طرح حسابيّة قد ينجم عنها أخطاء تدوير محسوسة عند حساب قيمة $v_1 = A_1 - \alpha_1 e_1$.

بغية حساب المصفوفة H_1A نرمز بـــ A_j و $(H_1A)_j$ للعمود رقم j من المصفوفة A والمصفوفة H_1A على الترتيب. عندها، يكون

$$(H_1A)_j = A_j - 2u_1u_1^T A_j = A_j - \beta \cdot v_1^T A_j v_1, \quad \beta = \frac{2}{v_1^T v_1}. \tag{18}$$

يمكن حساب العدد β بمساعدة العلاقة التالية

$$\beta^{-1} = \frac{v_1^T v_1}{2} = \frac{1}{2}\left(A_1^T A_1 - 2\alpha_1 a_{11} + \alpha_1^2\right) = -\alpha_1(a_{11} - \alpha_1). \tag{19}$$

⌖ **في المرحلة الثانية**، نطبّق العمليّة السابقة على المصفوفة الجزئيّة ذات الأبعاد $(m-1)\times(n-1)$ والتي نحصل عليها بحذف السطر الأول والعمود الأول من المصفوفة H_1A. بهذا نحصل على شعاعٍ $\bar{u}_2 \in \mathbb{R}^{m-1}$ ومصفوفة هاوسهولدر $\bar{H}_2 = I_{m-1} - 2\bar{u}_2\bar{u}_2^T$. نضع $u_2 = (0, \bar{u}_2)^T$ ونضرب طرفي المساواة (16) بالمصفوفة $H_2 = I_m - 2u_2u_2^T$ فنحصل على

$$H_2H_1A = H_2\begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & \bar{H}_2 C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \alpha_2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}.$$

بمتابعة هذه التحويلات على الأعمدة نحصل على مصفوفة مثلثيّة:

$$\underbrace{H_n \cdot \ldots \cdot H_2 H_1}_{Q^T} A = R$$

وهذا يعطينا تفريق QR للمصفوفة A مع $Q^T = H_n \cdot \ldots H_2 H_1$.

❖ كلفـــة التفريق QR

في المرحلة الأولى، نقوم بحساب α_1 من العلاقة (17) وهذا يتطلّب تقريباً $(\approx m\ operations)$، وأمّا حساب المقدار $2 / v_1^T v_1$ عن طريق العلاقة (19) فهو مهمل وفيما يتعلّق بحساب بالأشعّة $\left((H_1 A)_j\right)_{j=2,\ldots,n}$ باستخدام العلاقة (18) فإنّ ذلك يتطلّب تقريباً $(\approx (n-1) \cdot 2 \cdot m\ operations)$.

بالمحصّلة، تتطلّب هذه المرحلة تقريباً $\approx 2mn\ operations$. ومن ثمّ فإنّ الحصول على التفريق QR للمصفوفة A يتطلّب:

$$2(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1) \approx 2n^3 / 3\ operations \quad when \ \ m = n,$$
$$2m(n + (n-1) + \cdots + 1) \approx mn^2\ operations \quad when \ \ m \gg n.$$

بمقارنة هذه الكلفة مع كلفة حل المعادلات (13) والتي تتطلّب تقريباً $(\approx mn^2 / 2\ operations)$ لحساب المصفوفة $A^T A$ كما تتطلّب تقريباً $(\approx n^3 / 6\ operations)$ لتعيين تفريق شولسكي للمصفوفة $A^T A$، نلاحظ أنّ التفريق QR يكلّف في أسوأ الأحوال مثلَي هذه الكلفة.

مثـــال: في الحالة التي تكون فيها أعمدة المصفوفة A **"تقريبـــاً"** مرتبطة خطّياً، فإنّه يستحسن حلّ المسألة (12) باستخدام التفريق QR بدلاً من حلّ المعادلات (13) مباشرةً. فعلى سبيل المثال،

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث ε هو عددٌ صغيرٌ يحقق $\varepsilon^2 < eps$ إذا افترضنا eps دقّة الآلة التي نجري فيها الحسابات العددية بالنقطة العائمة. بإجراء حسابات تامّة (دون تقريب عددي) نحصل على

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ويعطى حلّ المعادلات (13) في هذه الحالة القيم

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon^2).$$

نلاحظ هنا أنّ إجراء الحسابات العددية بالنقطة العائمة يخفي الحدّ ε^2 من المصفوفة $A^T A$ وبذلك تصبح غير قلوبة، ولا يكون هناك بالنتيجة حلٌ للمعادلات (13).

بالمقابل، فإنّ تطبيق خوارزميّة Householder-Businger-Golub تعطينا (بإهمال الحدّ ε^2):

$$\alpha_1 = -1,\ v_1 = (2, \varepsilon, 0)^T, \ldots$$

وفي النهاية نحصل على

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\cdot\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon/\sqrt{2} \\ -\varepsilon/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

يعطي حل الجملة

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\cdot\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

تقريباً جيّداً للحل النظري للمسألة.

5. مسائل وتمارين

1.5. لتكن $A \cdot x = b$ جملة معادلات خطيّة معرّفة كما يلي

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}.$$

تقبل هذه الجملة الحل $x^T = (1, -1)$. ليكن $x_1 = (0.999, -1.001)$ و $x_2 = (0.341, -0.087)$ حلاّن تقريبيّان لهذه الجملة. نعرّف "**راسب**" الشعاع x بأنّه الشعاع $r(x) = b - A \cdot x$.

أولاً: احسب كلاً من $r(x_1)$ و $r(x_2)$. ما تعليقك على النتيجة ؟

ثانيـــاً: تحقق صحّة المساواة

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 659000 & -563000 \\ -913000 & 780000 \end{pmatrix}.$$

وعيّن قيمة $\kappa_\infty(A)$.

ثالثـــاً: عبّر عن الفرق $\Delta x = \tilde{x} - x$ بدلالة الراسب $r(\tilde{x})$. هل يوضّح ذلك الوضع الذي لاحظناه في أولاً ؟

2.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تقبل تفريقاً LR حيث $|\ell_{ij}| \le 1$ أياً كان $1 \le j \le i \le n$. نرمز بـــ a_i^T و u_i^T إلى الأسطر رقم i من المصفوفة A والمصفوفة R على الترتيب. برهن أنّ

$$u_i^T = a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \cdot u_k^T$$

واستنتج أنّ

$$\|U\|_\infty \le 2^{n-1} \cdot \|A\|_\infty .$$

.3.5 لتكن A و C مصفوفتين مربّعتين. نعرّف المصفوفة $R = I - CA$. نفترض أنّ $\|R\| < 1$ حيث $\|\ \|$ هو نظيمٌ مصفوفاتي ما.

أولاً: برهن أنّ المصفوفتين A و C قلوبتان وأنّ

$$\frac{\|R\|}{\|A\| \cdot \|C\|} \le \frac{\|A^{-1} - C\|}{\|C\|} \le \frac{\|R\|}{1 - \|R\|}.$$

ثانيـــاً: ليكن $\hat{x}$ حلاً تقريبياً لجملة المعادلات $A \cdot x = b$. نعرّف $r = b - A \cdot \hat{x}$. برهن المتراجحة التالية

$$\|x - \hat{x}\| \le \frac{\|C \cdot r\|}{1 - \|R\|}$$

.4.5 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. نعرّف التحليل $A = M - N$ حيث M مصفوفة قلوبة. وليكن $\|\ \|$ نظيماً مصفوفاتياً تتحقق من أجله المتراجحة التالية

$$\|N\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$$

برهن أنّ $\rho(M^{-1}N) < 1$.

.5.5 **أولاً**: احسب تفريق شولسكي $A = B \cdot B^T$ لمصفوفة هلبرت المعرّفة بالعلاقة

$$A = \left(\frac{1}{i + j - 1}\right)_{1 \le i, j \le n}, \qquad n = 3, 6, 9, 12, 15.$$

ثانيـــاً: قارن النتائج العددية مع القيم الفعليّة لعناصر المصفوفة B المعطاة بالعلاقات

$$b_{jk} = \frac{\sqrt{2k-1} \cdot (j-1)! \cdot (j-1)!}{(j-k)! \cdot (j+k-1)!}. \tag{20}$$

ما عدد الأرقام المعنويّة (ذات الدلالة) ؟

ثالثـــاً: إذا كانت $\hat{B}$ ترمز إلى النتيجة العدديّة، احسب الفرق $A - \hat{B} \cdot \hat{B}^T$. واحسب أيضاً الفرق $A - B \cdot B^T$ في حالة مصفوفة التفريق B المعرّفة بالعلاقات (20).

.6.5 لتكن $A = \left(a_{ij}\right)$ مصفوفة مربّعة. نرمز بـ $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$ لمصفوفات المراحل الانتقاليّة في خوارزميّة غاوص. برهن أنّه عند اتّباع استراتيجيّة البحث الجزئي في ايجاد المرتكز القطري (البحث عمودياً) يكون لدينا

$$\max_{i,j,k} \left|a_{ij}^{(k)}\right| \le 2^{n-1} \cdot \max_{i,j} \left|a_{ij}\right|. \tag{21}$$

بيّن أنّ المتراجحة السابقة تكون مساواة في حالة المصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & 1\\ -1 & 1 & & & 1\\ -1 & -1 & 1 & & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

.7.5 لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة. نفترض وجود **عددين موجبين** $0<\beta<\alpha$ بحيث يكون:

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \beta\cdot x^Tx\le x^TAx\le\alpha\cdot x^Tx$$

أثبت أنّ

$$|a_{ij}|\le\alpha-\beta\quad,\quad 1\le i,j\le n.$$

.8.5 لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، . برهن أنّ

$$\kappa_2\left(A^T\cdot A\right)=\left[\kappa_2(A)\right]^2.$$

.9.5 لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. برهن أنّ تفريق QR (حيث Q متعامدة و R مثلثيّة من الأعلى) لهذه المصفوفة يكون **وحيداً** إذا تحقّقت الشروط:

$$r_{ii}>0,\quad 1\le i\le n.$$

.10.5 لتكن $G\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة، تكتب على الشكل

$$G=\begin{bmatrix}A & B\\ B^T & C\end{bmatrix},\quad A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

أولاً: أثبت أنّ المصفوفة $C-B^TA^{-1}B$ متناظرة ومعرّفة موجبة.

حسب مبرهنة شولسكي يمكن تفريق المصفوفة G وكتابتها بالشكل $G=R\cdot R^T$. حيث R مصفوفة مثلثيّة من الأسفل من الشكل

$$R=\begin{bmatrix}R_{11} & 0\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix},\quad R_{11}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}),$$

ثانيـــاً: بيّن أنّه إذا كانت N مصفوفة مربّعة وقلوبة فإنّ المصفوفة N^TN تكون متناظرة ومعرّفة موجبة.

ثالثـــاً: برهن أنّ $R_{22}R_{22}^T=C-B^TA^{-1}B$.

رابعـــاً: أثبت صحّة المتراجحتين التاليتين

$$r_{ii}^2 \geq \min_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot G \cdot x}{x^T x} = \frac{1}{\left\|R^{-1}\right\|_2^2}, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$r_{ii}^2 \leq \max_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot G \cdot x}{x^T x} = \|R\|_2^2, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

خامساً: برهن أنّ

$$\kappa_2(R) \geq \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|r_{ii}|}{|r_{kk}|}.$$