الفصل الرابع
الطرائـــق التكراريّة في حلّ جُمَل المعادلات الخطّيـــة

ندرس في هذا الفصل بعضاً من الطرائق التكراريّة "النموذجيّة" من الشكل

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

تحدّد المصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ والشعاع $c \in \mathbb{R}^n$ من معطيات الجملة الخطيّة $A \cdot x = b$ المراد حلّها (تتعلّق المصفوفة B فقط بالمصفوفة A).

1. لمحة عامّة عن الطرائق التكراريّة

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة، وليكن $b \in \mathbb{R}^n$. نرغب في تعيين شعاعٍ $x \in \mathbb{R}^n$ بحيث يكون $A \cdot x = b$. نفترض أننا وجدنا مصفوفةً $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وشعاعاً $c \in \mathbb{R}^n$ بحيث تكون المصفوفة $(I - B)$ قلوبة وبحيث يكون الحلّ الوحيد للجملة الخطيّة $x = B \cdot x + c$ هو أيضاً حلٌّ للجملة $A \cdot x = b$.

يوحي شكل الكتابة $x = B \cdot x + c$ بتعريف **طريقةٍ تكراريّة** لحلّها: نختـــار شعاعاً $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ونعرّف متتالية الأشعّة

$$x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \geq 0.$$

فالطريقة التكراريّة هي آليّة لتوليد متتاليات أشعّة انطلاقاً من شعاعٍ ابتدائي اختياري.

تعريف: نقول أنّ الطريقةٍ التكراريّة متقاربة إذا تحقّق الشرط

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

ملاحظة: تمثّل الطرائق التكراريّة حالة خاصّة من طريقة التقريبات المتتالية (طريقة Picard) في ايجاد نقطة ثابتة للتطبيق:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v \mapsto f(v) = B \cdot v + c$$

يسمّى مثل هذا التطبيق "مقلّصاً" إذا وُجِدَ نظيمٌ مصفوفاتي ملحق ‖ ‖ يكون من أجله $\|B\| < 1$، وعندها يكون

$$\|f(v) - f(u)\| \le \|B\| \cdot \|v - u\|.$$

تتركّز دراسة الطرائق التكراريّة حول المسألتين التاليتيـــن:

- تتعلّق المسألة الأولى بدراسة تقارب طريقة تكراريّة من النمط (1) أيْ أنْ ندرس فيما إذا كان $\rho(B) < 1$ أو بشكلٍ مكافئ إذا وجد نظيمٌ مصفوفاتي ملحق يكون من أجله $\|B\| < 1$.
- أمّا المسألة الثانية، فهي تختصّ بمقارنة الطرائق التكراريّة من حيث سرعة التقارب: الطريقة الأسرع هي الطريقة التي تمتلك مصفوفة تكرارها B نصف قطر طيفي أصغر.

2. عرض وصفي لبعض الطرائق التقليديّة النموذجيّة

لتكن $A \cdot x = b$ جملة معادلات خطيّة مصفوفتها A قلوبة. نفترض أنّه يمكن كتابة هذه المصفوفة على الشكل

$$A = M - N \qquad (2)$$

حيث M مصفوفة **قلوبة** و**"سهلة القلب"** ؛ أي أنّها عمليّاً إمّا أن تكون قطريّة أو مثلثيّة نقطياً أو أن تكون قطريّة أو مثلثيّة كتليـــاً.

في هذه الحالة، نستطيع أن نصيغ التكافؤات التاليـــة

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad M \cdot x = N \cdot x + b \quad \Leftrightarrow \quad x = \underbrace{M^{-1}N}_{B} \cdot x + \underbrace{M^{-1} \cdot b}_{c}$$

وهذا الشكل يوحي بالطريقة التكراريّة

$$x_0 \in \mathbb{R}^n,$$
$$x_{k+1} = M^{-1}N \cdot x_k + M^{-1}b, \quad k \ge 0.$$

ويكون في هذه الحالة

$$B = M^{-1}N = I - M^{-1} \cdot A$$

من ذلك يتبيّن لنا أنّ المصفوفة $(I - B)$ قلوبة. يجري حساب التكرارات عند الانتقال من شعاع التكرار x_k إلى الشعاع x_{k+1} بحلّ جمل المعادلات الخطيّة

$$M \cdot x_{k+1} = N \cdot x_k + b, \quad k \ge 0.$$

1.2. طريقـــة جاكوبي Jacobi

لتكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مربّعة عناصر قطرها الرئيس غير معدومة، أيْ

$$a_{ii} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

وليكن التحليل $A = D - E - F$ المعرّف بالمصفوفات

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}), \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

توافق طريقة جاكوبي اختيار $M = D$ فنحصل عندها على التكافؤات التاليـــة:

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow D \cdot x = (E+F) \cdot x + b \Leftrightarrow x = D^{-1} \cdot (E+F) \cdot x + D^{-1} \cdot b$$

وهذا يقودنا إلى تعريف طريقة جاكوبي التكراريّة (النقطيّة) كالآتي:

$$D \cdot x_{k+1} = (E+F) \cdot x_k + b$$

أو بالشكل

$$x_{k+1} = \underbrace{D^{-1} \cdot (E+F)}_{J} \cdot x_k + D^{-1} \cdot b, \quad k \geq 0.$$

ومن ثمّ، فإنّ مصفوفة التكرار لهذه الطريقة هي

$$\boxed{J = D^{-1} \cdot (E+F) = I - D^{-1} \cdot A}$$

وتسمّى **مصفوفة جاكوبي** (النقطيّة).

❖ **حساب التكرار :** يحسب شعاع التكرار $x_{k+1} = \left(x_{k+1}(i)\right)_{i=1}^{n}$ من المعادلات الخطّيّة التالية:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_{k+1}(1) = & - a_{1,2}x_k(2) - a_{1,3}x_k(3) \cdots - a_{1,n-1}x_k(n-1) - a_{1,n}x_k(n) + b_1 \\ a_{2,2}x_{k+1}(2) = -a_{21}x_k(1) & - a_{2,3}x_k(3) \cdots - a_{2,n-1}x_k(n-1) - a_{2,n}x_k(n) + b_2 \\ \quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n,n}x_{k+1}(n) = -a_{n,1}x_k(1) - a_{n,2}x_k(2) \cdots & - a_{n,n-1}x_k(n-1) + b_n \end{cases}$$

ومن الناحية **الخوارزميّة** يكتب تكرار جاكوبي كما يلـــي:

$$\boxed{x_{k+1}(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_k(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_k(j)\right), \quad 1 \le i \le n.}$$

مثـــال

◆ لتكن الجملة الخطيّة

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

والتي تقبل الحل $\{x_1 = 1, \quad x_2 = 1\}$. بتطبيق خوارزميّة جاكوبي انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{12}{10} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{98}{100} \\ \frac{98}{100} \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \frac{1002}{1000} \\ \frac{1004}{1000} \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} \frac{9996}{10000} \\ \frac{9992}{10000} \end{pmatrix}.$$

◆ لننظر الآن في الجملة الخطيّة

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

والتي تقبل أيضاً الحل $\{x_1 = 1, \quad x_2 = 1\}$. بتطبيق خوارزميّة جاكوبي انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -49 \\ -49 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 501 \\ 251 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -2499 \\ -2499 \end{pmatrix}.$$

يتبيّن لنا من المثالين السابقين أنّ المتتاليات المولّدة بطريقة جاكوبي يمكن أن "**تقترب**" من الحلّ أو على العكس يمكن أن "**تبتعد**" عن الحل. من ذلك نعلم أنّه لا بدّ من دراسة تقارب هذه الطريقة.

2.2. طريقـــة غاوص–سايدل Gauss-Seidel

إذا استبدلنا في معادلات تكرار جاكوبي (3) بالقيم $x_k(i)$ القيم الجديدة $x_{k+1}(i)$ فإننا نحصل على جملة المعادلات التاليـــة:

$$(4)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_{k+1}(1) = & -a_{1,2}x_k(2) - a_{1,3}x_k(3)\cdots - a_{1,n-1}x_k(n-1) - a_{1,n}x_k(n) + b_1 \\ a_{2,2}x_{k+1}(2) = -a_{21}x_{k+1}(1) & -a_{2,3}x_k(3)\cdots - a_{2,n-1}x_k(n-1) - a_{2,n}x_k(n) + b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n,n}x_{k+1}(n) = -a_{n,1}x_{k+11}(1) - a_{n,2}x_{k+1}(2)\cdots & \cdots \cdots - a_{n,n-1}x_{k+1}(n-1) \qquad + b_n \end{cases}$$

ومن الناحية **الخوارزميّة** يكتب تكرار غاوص–سايدل كما يلـــي:

$$x_{k+1}(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_k(j)\right), \quad 1 \le i \le n.$$

وهذا يعرّف طريقةً تكراريّة جديدة يمكن صياغتها باستخدام الصيغة المصفوفاتيّة على الشكل التالـــي:

$$D \cdot x_{k+1} = E \cdot x_{k+1} + F \cdot x_k + b$$

أو بالشكل المكافيء

$$x_{k+1} = \underbrace{(D-E)^{-1} \cdot F}_{\mathcal{L}_1} \cdot x_k + (D-E)^{-1} \cdot b, \quad k \ge 0.$$

تسمّى المصفوفة

$$\boxed{\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} \cdot F}$$

مصفوفة **غاوص–سايدل** (النقطيّة).

ملاحظة: إحدى الفوائد التي تميّز طريقة غاوص–سايدل عن طريقة جاكوبي كونها تحتاج فقط إلى شعاع واحد لتخزين وإجراء التكرار (بدلاً من شعاعين في حالة جاكوبي)، وهذا مفيدٌ جداً في حالة الجمل الخطّيّة الكبيرة. من الناحية العمليّة يجري حساب التكرارت على شعاع التكرار $x \in \mathbb{R}^n$ انطلاقاً من القيم الابتدائيّة x_0 $x \leftarrow$ كما يلـــي:

$$\boxed{x(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x(j)\right), \quad 1 \le i \le n.}$$

3.2. طريقـــة SOR

إحدى التعديلات الهامّة لطريقة غاوص–سايدل هي الطريقة المسمّاة SOR وهذا الاسم هو اختصارٌ لكلمات العبارة الانكليزيّة "Successive Over-Relaxation".

في الحالة التي تتقارب فيها طريقة غاوص–سايدل يمكن أنْ ندخل وسيطاً حقيقياً $\omega \neq 0$ من خلال تحليل المصفوفة $A = M - N$ بحيث يكون

$$M = \tfrac{1}{\omega} D - E, \quad N = \tfrac{1-\omega}{\omega} D + F.$$

عندها يكتب تكرار الطريقة التكراريّة الموافقة لهذا التحليل كمـــا يلـــي

$$(\tfrac{1}{\omega} D - E) \cdot x_{k+1} = (\tfrac{1-\omega}{\omega} D + F) \cdot x_k + b, \quad k \geq 0.$$

أو على الشكل

$$(D - \omega \cdot E) \cdot x_{k+1} = [(1-\omega) \cdot D + \omega \cdot F) \cdot x_k + \omega \cdot b, \quad k \geq 0.$$

تعرّف العلاقة التكراريّة السابقة مايعرف باسم طريقة SOR أو طريقة الـــ Relaxation. تكتب مصفوفة التكرار لهذه الطريقة بالشكل

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= (\tfrac{1}{\omega} D - E)^{-1} \cdot (\tfrac{1-\omega}{\omega} D + F) \\ &= (D - \omega \cdot E)^{-1} [(1-\omega) \cdot D + \omega \cdot F]. \end{aligned}}$$

إنّ اختيار قيمة الوسيط $\omega = 1$ يوافق طريقة غاوص–سايدل التي رأيناها سابقاً، أيْ أنّ $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} \cdot F$ وهذا يبرّر الرمز $\mathcal{L}_1$ الذي أعطيناه لمصفوفة تكرار طريقة غاوص–سايدل في الفقرة السابقة.

تتضمّن دراسة طريقة SOR النقطتين الأساسيّتين:

- البحث عن مجـــالٍ $I \subset \mathbb{R}$ لا يحوي الصفر ويحقق الخاصّة التالية:

$$\omega \in I \Rightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$$

- البحث عن قيمةٍ للوسيط $\omega^* \in I$ بحيث يكون

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \inf_{\omega \in I} \rho(L_\omega).$$

يقوم حساب تكرار طريقة الـــ SOR على حلّ جملة المعادلات الخطيّة التاليـــة:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_{k+1}(1) &= a_{1,1} x_k(1) - \omega \cdot [a_{1,1} x_k(1) + a_{1,2} x_k(2) + \cdots + a_{1,n} x_k(n) - b_1] \\ a_{2,2} x_{k+1}(2) &= a_{2,2} x_k(2) - \omega \cdot [a_{2,1} x_{k+1}(1) + a_{2,2} x_k(2) + \cdots + a_{2,n} x_k(n) - b_2] \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \\ a_{n,n} x_{k+1}(n) &= a_{n,n} x_k(n) - \omega \cdot [a_{n,1} x_{k+1}(1) + \cdots + a_{n,n-1} x_{k+1}(n-1) + a_{n,n} x_k(n) - b_n] \end{cases}$$

ومن الناحية **الخوارزميّة** يكتب تكرار طريقة SOR كما يلـــي:

$$\boxed{x(i) \leftarrow x(i) + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x(j) - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x(j) \right), \quad 1 \leq i \leq n.}$$

3. دراسة تقارب الطرائق التكراريّة

جميع الطرائق التي عرضناها في الفقرة السابقة هي من النمط

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

حيث تمثّل B مصفوفة تكرار الطريقة. نبحث في هذه الفقرة في تقارب الطرائق التكراريّة من هذا النمط كما نبحث في مفهوم سرعة تقارب طريقةٍ تكراريّة.

نلاحظ هنا أنّه إذا تقاربت المتتالية المولّدة بعلاقة التكرار (6) نحو الشعاع $x \in \mathbb{R}^n$ فإنّ هذا الأخير يحقق المعادلة

$$x = B \cdot x + c \tag{7}$$

بطرح العلاقات (6) و (7) طرفاً لطرف نحصل على

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x &= B \cdot (x_k - x) = \cdots \\ &= B^{k+1} \cdot (x_0 - x). \end{aligned}$$

نعرّف شعاع الخطأ في الخطوة k بأنّه الفرق $e_k = x_k - x$ عندئذٍ يكون

$$e_k = B^k \cdot e_0 \tag{8}$$

يتبيّن من ذلك أنّ

$$\left(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x\right) \Leftrightarrow \left(\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{k\to\infty} B^k \cdot v = 0\right) \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة التاليـــة:

مبرهنـــة 1 : **تتقارب** الطريقة التكراريّة (6) **إذا وفقط إذا كان** $\rho(B) < 1$.

نتيجـــة: إذا كان $\|B\| < 1$ حيث $\|\ \|$ نظيمٌ مصفوفاتي ما، فإنّ المصفوفة $I - B$ تكون قلوبة وتكون الطريقة التكراريّة (6) متقاربة.

مثـــال

لندرس الطريقة التكراريّة المعروفة باسم "تكرار ريتشاردسون" والتي تكتب على الشكل

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot (b - A \cdot x_k), \quad \alpha > 0.$$

يمكن إعادة كتابة هذا التكرار على الشكل المألوف

$$x_{k+1} = (I - \alpha \cdot A) \cdot x_k + \alpha \cdot b.$$

وهكذا، نلاحظ أنّ مصفوفة التكرار في هذه الحالة هي المصفوفة $B_\alpha = I - \alpha A$ ومن ثمّ فإنّ تقارب هذه الطريقة مرهون بالعدد $\rho(I - \alpha A)$.

إذا افترضنا أنّ جميع القيم الذاتيّة (λ_i) للمصفوفة A حقيقيّة بحيث $\lambda_{\min} \le \lambda_i \le \lambda_{\max}$. عندها تحقّق القيم الذاتيّة (μ_i) للمصفوفة B_α المتراجحة

$$1 - \alpha\lambda_{\max} \le \mu_i \le 1 - \alpha\lambda_{\min}.$$

وبشكلٍ خاص، عندما يكون $\lambda_{\min} < 0$ فإنّ قيمةً ذاتيّة واحدةً على الأقلّ μ_i تكون أكبر تماماً من الواحد، ومن ثمّ يكون $\rho(B_\alpha) > 1$ أياً كانت قيمة الوسيط $\alpha > 0$. في هذه الحالة تتباعد الطريقة التكراريّة.

نفترض الآن، أنّ $\lambda_{\min} > 0$ أيْ أنّ جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A موجبة تماماً. عندئذٍ، يصبحُ تقارب هذه الطريقة مرهونٌ بتحقق الشرطين التـــاليين:

$$1 - \alpha\lambda_{\min} < 1 \quad , \quad 1 - \alpha\lambda_{\max} > -1.$$

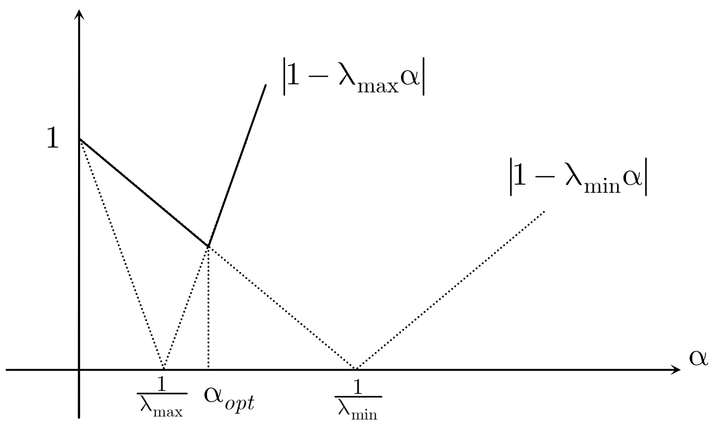
الشرط الأوّل محقق إذا كان $\alpha > 0$. أمّا الشرط الثاني فيقتضي أن تكون قيمة الوسيط محققة للشرط $\alpha < 2/\lambda_{\max}$ بمعنى، أنّ طريقة ريتشاردسون تكون متقاربة عندما يحقق الوسيط الشرط

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

ونتساءل هنا عن أفضل قيمة α_{opt} للوسيط α أي قيمة α التي تجعل $\rho(B_\alpha)$ أصغرياً ؟ لدينـــا

$$\rho(B_\alpha) = \max\{|1 - \alpha\lambda_{\min}|, |1 - \alpha\lambda_{\max}|\}. \tag{9}$$

يوضّح الشكل (1) بيان التطبيق $\alpha \mapsto \rho(B_\alpha)$ والذي يمثّل نصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار، ونلاحظ أنّ القيمة الأمثليّة α_{opt} للوسيط α يأخذها التطبيق عند تقاطع نصف المستقيم $\left\{\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_{\max}| : \alpha > \frac{1}{\lambda_{\max}}\right\}$ مع نصف المستقيم $\left\{\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_{\min}| : \alpha < \frac{1}{\lambda_{\min}}\right\}$، أيْ أن يكون: $-1 + \lambda_{\max}\alpha_{opt} = 1 - \lambda_{\min}\alpha_{opt}$.



الشكل 1: بيان تبعيّة $\rho(B_\alpha)$ للوسيط α.

ومنه نجد $\alpha_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$ وبتعويض هذه القيمة في الصيغة (8) نجد

$$\rho(B_{\alpha_{opt}}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}.$$

ملاحظـــة: لنعيد النظر إلى المثالين الذين قدّمناهما في عرضنا لطريقة جاكوبي في الفقرة 1.2، ففي المثال الأوّل مصفوفة تكرار جاكوبي هي

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 \\ -2/10 & 0 \end{pmatrix}$$

وقيمها الذاتيّة هي $\lambda = \pm\sqrt{2}/10$ وهذا يعني أنّ $\rho(J) < 1$ ومن ثمّ فإنّ طريقة جاكوبي تتقارب. من جهةٍ ثانية، في المثال الثاني تأخذ مصفوفة جاكوبي الشكل

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

ونصف قطرها الطيفي يساوي $\rho(J) = \sqrt{50} > 1$ ومن ثمّ فطريقة جاكوبي في هذه الحالة تكون متباعدة.

مبرهنـــة 2 : لتكن $\mathcal{L}_\omega$ مصفوفة التكرار لطريقة SOR في حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$. تحقق هذه المصفوفة الشرط

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$$

ومن ثمّ، فإنّ طريقة الـــ SOR تكون متباعدة إذا لم يجرِ اختيار الوسيط ω في المجال $]0,2[$.

الإثبـــات:

نعلم أنّ $\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega} D - E)^{-1} \cdot (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)$. فإذا كانت (λ_i) هي مجموعة القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة فإنّ

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{\det(\frac{1-\omega}{\omega} D + F)}{\det(\frac{1}{\omega} D - E)} = (1-\omega)^n$$

ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right|^{1/n} = |1-\omega|. \qquad \blacksquare$$

1.3. تقدير الخطأ وسرعة التقـــارب

إنّ الطريقة التي تتقارب فيها المتتالية (x_k) نحو الحل x معقّدة نسبيّاً، ويتعلّق ذلك بالقيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لمصفوفة التكرار B. لكن سلوك الخطأ $e_k = x_k - x$ في معظم الحالات التطبيقيّة يكون بسيطاً إلى درجة ما، حيث يتناقص هذا الخطأ في كلّ تكرارٍ بمعدّلٍ ثابت تقريبـــاً: تعلمُ أنّه عندما تكون الطريقة التكراريّة متقاربة فإنّ ذلك يعني أن $\rho(B) < 1$ وهذا بدوره يقتضي وجود نظيمٍ مصفوفاتي ملحق ‖ ‖ يحقق الشرط

$$\rho(B) \leq \|B\| < \rho(B) + \varepsilon < 1, \quad \varepsilon > 0$$

وهذا يعني وجود عدد $\rho(B) \leq \delta < 1$ بحيث يكون

$$\|x_{k+1} - x\| \leq \delta \cdot \|x_k - x\|, \quad k \geq 0. \tag{10}$$

لتعيين قيمة تقريبيّة للعدد δ نتطلّع إلى العلاقة التكراريّــة

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k = B \cdot (e_k - e_{k-1}) = B \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad k \geq 1$$

توحي لنا هذه العلاقة باستعمال التقديرات

$$\delta_k = \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|}, \quad k \geq 1.$$

من جهةٍ أخرى، إذا افترضنا أنّ (10) محققة فإنّ

$$\|x_{k+1} - x_k\| \geq \|x_k - x\| - \|x_{k+1} - x\| \geq \|x_k - x\| - \delta \cdot \|x_k - x\|$$

وبالتـــالي

$$\|x_k - x\| \leq \frac{1}{1-\delta} \|x_{k+1} - x_k\|$$

أو

$$\boxed{\|x_{k+1} - x\| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|x_{k+1} - x_k\|}$$

تبيّن هذه المتراجحة أنّه عندما يكون $\delta \approx 1$ يكون تقارب الطريقة التكراريّة بطيئاً. وفي هذه الحالة يكون الفرق $\|x_{k+1} - x_k\|$ أصغر بكثير من الخطأ الفعلي $\|x_{k+1} - x\|$.

- **سرعة التقـــارب**

نريد في هذه الفقرة أن نجيب على التساؤلين التاليـــين:

- ما هو عدد التكرارات اللازمة للحصول على حلّ تقريبي يتمتّع بدقّةٍ معيّنة ؟
- متى يكون استعمال طريقةٍ تكراريّة مفضّلاً على استعمال طريقة غاوص في حلّ جملة المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ ؟

للإجابة على التساؤل الأوّل، نبحث عن قيمةٍ m يكون عندها

$$\|x_m - x\| \leq \varepsilon \cdot \|x_0 - x\|$$

حيث يمثّل ε النسبة التي نريد بها إنقاص الخطأ الابتدائي عندما نصل إلى التكرار m. فإذا وجدَ عددٌ موجبٌ $\delta < 1$ بحيث تتحقق المتراجحات (10) فإننا نستطيع أن نكتب

$$\|x_m - x\| \leq \delta^m \cdot \|x_0 - x\|, \quad k \geq 0$$

نختار عندئذٍ، أصغر قيمة للدليل m تحقق الشرط:

$$\delta^m \leq \varepsilon$$

أيْ

$$m \geq \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \delta} \right\rceil \equiv m^*. \tag{11}$$

يتبيّن من هذه العلاقة أنّ عدد التكرارات اللازم للوصول إلى الدقّة المطلوبة يتناسب عكساً مع المقدار $-\ln \delta$.

لإعطاء دلالة أكثر للعلاقة السابقة، نستخدمها في ايجاد حلٍ لجملة معادلات خطّية كثيفة $A \cdot x = b$ (مصفوفتها A لا تحوي أصفاراً كثيرة) بطريقة تكراريّة من النمط (1) ونبحث عن عدد التكرارات m اللازم لكي تتحقق المتراجحة:

$$\frac{\|x_m - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-6} = \varepsilon \tag{12}$$

فإذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فإنّ عدد العمليّات التي يتطلّبها تكرارٌ واحد هو n^2 عمليّة ومن ثمّ حتّى يتحقّق الشرط (12) يلزمنا عددٌ من التكرارات يساوي

$$m^* = \left\lceil \frac{6 \ln 10}{-\ln \delta} \right\rceil \tag{13}$$

يقابل هذا العدد من التكرارات عددٌ من العمليـــّات الحسابيّة يعادل

$$m^* \cdot n^2 = \left\lceil \frac{6 \ln 10}{-\ln \delta} \right\rceil \cdot n^2$$

من جهةٍ أخرى، نعلم أنّ استخدام طريقة غاوص في حذف المجاهيل يتطلّب عددٌ من العمليـــّات يقارب $n^3 / 3$ عمليـــّة، ومن ثمّ فإنّ الطريقة التكراريّة تكون أكثر فعّاليّة إذا تحقق الشرط

$$m^* \cdot n^2 < n^3 / 3$$

أو

$$\boxed{m^* < n / 3} \tag{14}$$

مثـــال: لتكن $A \in \mathcal{M}_{51}(\mathbb{R})$. يصبح عندئذٍ الشرط (14) $m^* < 17$. قمنا، في الجدول التالي، بترتيب قيم m^* الموافقة لقيمٍ مختلفة للمعامل δ. فعندما يكون $\delta \leq 0.44$ على سبيل المثال تكون الطريقة التكراريّة أكثر فعّاليّة من طريقة غاوص في حذف المجاهيل.

δ	$-\ln\delta$	m^*
0.9	0.105	131
0.8	0.223	62
0.6	0.511	27
0.4	0.916	15
0.2	1.61	9

ننوّه هنا إلى أنّه في أغلب الأحيان يجري استخدام الطرائق التكراريّة في حالة جمل المعادلات الخطيّة الكبيرة والتي تكون مصفوفتها كثيرة الأصفار، ومع أنّه في هذه الحالة غالباً ما تكون قيمة δ قريبة جداً من 1 فإنّ فعّاليـــة الطرائق التكراريّة المتاحة تبقى متفوّقة.

يمكن لنا أنْ نميّز طريقةً تكراريّة عن أخرى من خلال السرعة التي يسعى فيها الخطأ $e_k = x_k - x$ نحو الصفر. رأينا أنّه إذا كانت B هي مصفوفة التكرار لطريقةٍ ما فإنّ

$$e_k = B^k \cdot e_0$$

وباستخدام نظيم مصفوفاتي ملحق يكون $\|e_k\| \le \|B^k\| \cdot \|e_0\|$ ومن ثمّ يكون

$$\frac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \le \|B^k\| = \max_{e_0 \ne 0} \frac{\|B^k \cdot e_0\|}{\|e_0\|} = \max_{e_0 \ne 0} \frac{\|e_k\|}{\|e_0\|}. \tag{10}$$

نعرّف **وسطي تناقص الخطأ** في k تكرار بالعلاقة التالية

$$\sigma = \left(\frac{\|e_k\|}{\|e_0\|}\right)^{1/k}$$

لدينا هنا $\sigma \le \|B^k\|^{1/k}$.

تعريف: نسمّي **المعدّل الوسطي** للتقارب بعد k تكرار العدد الحقيقي

$$\Re_k(B) = -\ln\|B^k\|^{1/k}.$$

نلاحظ هنا أنّ المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار متناسبٌ عكساً مع عدد التكرارات اللازمة للحصول على خطأ في الحل لا يتجاوز دقّة معيّنة. في الواقع، لتعيين قيمة k بحيث يكون $\frac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \le \varepsilon$ نبحث عن أصغر قيمة لـــ k تحقق الشرط $\|B^k\| \le \varepsilon$ ، أو الشرط

$$-\ln\|B^k\|^{1/k} \ge -\frac{1}{k}\ln\varepsilon$$

ومن ثمّ نجد الشرط

$$k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \|B^k\|^{1/k}} = \frac{-\ln \varepsilon}{\Re_k(B)}. \tag{11}$$

ملاحظة: لهذا التعريف العديد من المساوئ، منها:

- معدّل التقارب يتعلّق بالعدد k وبالنظيم المستعمل،
- تعيين القيمة العدديّة للمقدار $\|B^k\|^{1/k}$ مكلفٌ من حيث عدد العمليّات ولا نقوم بحسابه عادةً.

لذلك نلجأ إلى تعريف معدّل مقارب للتقارب، بمعنى، أنْ نبحث في نهاية المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار عندما يسعى عدد التكرارات إلى اللانهاية.

في الحالة الخاصّة التي تكون فيها مصفوفة التكرار متناظرة (هرميتيّة) يكون لدينا:

$$\|B^k\|_2^{1/k} = \left[\rho(B^k)\right]^{1/k} = \left[\rho^k(B)\right]^{1/k} = \rho(B)$$

ويكون

$$\Re_k(B) = -\ln \rho(B).$$

إذن، في هذه الحالة يكون المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار ثابتاً ويساوي $-\ln \rho(B)$.

تعريف: نسميّ **معـــدّل تقـــارب** طريقةٍ تكراريّة مصفوفتها B العدد الحقيقي

$$\Re_\infty(B) = -\ln \rho(B). \tag{12}$$

نلاحظ هنا أنّ ما يبرر هذا التعريف هو الخاصّة التالية:

$$\lim_{k \to \infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B).$$

مبرهنـــة 3 : عدد التكرارات k اللازم لخفض الخطأ الابتدائي لطريقةٍ تكراريّة مصفوفتها B بنسبة ε هو أصغر عدد صحيح يحقق الشرط

$$k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{\Re_\infty(B)}. \tag{13}$$

الإثبـــات:

بما أنّ $\rho^k(B) = \rho(B^k) \leq \|B^k\|$ فإنّ $\rho(B) \leq \|B^k\|^{1/k}$ ومن ثمّ يكون $-\ln \rho(B) \geq -\ln \|B^k\|^{1/k}$ والذي يكتب بالشكل

$$\Re_\infty(B) \geq \Re_k(B).$$

وبالاعتماد على العلاقة (11) نستنتج صحّة المتراجحة (13). ■

ملاحظـــة: عندما تتوافر لدينا طريقتان تكراريّـــتان لحل جملة معادلات خطيّة (بحيث تكون كلفة حساب التكرار في كلّ منهما متقاربة) فإننا **نختار** (نفضّل) الطريقة التي يكون **معدّل تقاربها** أكبر. من الناحية العمليّة، لتعيين قيمة $\Re(B) = -\ln \rho(B)$. نكتفي بتقديرٍ جيّد لنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار $\rho(B)$. سنرى لاحقاً، من خلال بعض الأمثلة المتعلّقة بتقطيع المعادلات التفاضليّة أنّ قيمة $\rho(B)$ غالباً ما تكون قريبة من 1 ، فمثلاً عندما يكون $\rho(B) = 1 - \eta$ فإنّ

$$\Re(B) = -\ln(1-\eta) \underset{0}{\sim} \eta$$

وهذا العدد قريبٌ من الصفر ومن ثمّ يكون المقدار $-\ln \varepsilon / \Re(B)$ كبيراً.

2.3. حالـــة مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطرْ

تعريف: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ إنّها ذات **قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً** إذا وفقط إذا حقّقت عناصر قطرها الرئيس الشروط التاليـــة:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad , \quad 1 \leq i \leq n. \tag{14}$$

يرتبط مفهوم القطر الرئيس المسيطر بنتيجةٍ هامّة في الجبر الخطّي العددي تعرفُ باسم مبرهنة Gershgorin. تحدّد هذه المبرهنة التوضّعات المحليّة للقيم الذاتيّة لمصفوفةٍ مربّعة A في المستوي العقدي. نحتاج في بعض الأحيان إلى تحديد منطقة توضّع هذه القيم باستعمال معرفتنا لعناصر المصفوفة A. فمثلاً، من أبسط هذه التحديدات المتراجحة التالية:

$$|\lambda_i| \leq \|A\|$$

وذلك أياً كان النظيم المصفوفاتي $\|\ \|$. تزوّدنا مبرهنة Gershgorin بتحديدٍ أفضل لتوزّع القيم الذاتيّة في المستوي العقدي.

مبرهنـــة 4 (Gershgorin) : لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة عناصرها حقيقيّة أو عقديّة. إذا كانت $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة، عندئذٍ يوجد دليلٌ $1 \leq i \leq n$ بحيث يكون

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

أي أنّ جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A موجودة في اجتماع الأقراص $D_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\ \}$.

الإثبـــات:

ليكن $v \neq 0$ شعاعاً ذاتيّاً موافقاً للقيمة الذاتيّة λ. وليكن $1 \leq i \leq n$ بحيث يكون

$$|v_i| \geq |v_j|, \quad 1 \leq j \leq n.$$

من المطابقة $Av = \lambda v$ نجد

$$\sum_{j\neq i} a_{ij} v_j = (\lambda - a_{ii}) v_i.$$

بتقسيم طرفي العلاقة السابقة على v_i وباستخدام المتراجحة المثلثيّة نحصل على

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij} \cdot \frac{v_j}{v_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \qquad \blacksquare$$

تسمّى الأقراص $D_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \}$ أقراص Gershgorin. توضّح المبرهنة السابقة أنّ $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1 \cup \cdots \cup D_n$. من جهةٍ ثانية، إذا كان أحد هذه الأقراص معزولاً عن بقيّة الأقراص فإنّ هذا القرص يحوي تماماً قيمة ذاتيّة واحدة.

نتيجــة: إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ هذه المصفوفة قلوبة.

الإثبــات: بما أنّ المصفوفة A ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ اجتماع أقراص Gershgorin لها لا يحوي الصفر أي أنّ القيمة $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة. ومن ثمّ لا يمكن ايجاد شعاع $v \neq 0$ بحيث يكون $Av = 0$ وهذا يعني أنّ المصفوفة A قلوبة.

مبرهنــة 5 : إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ طريقة جاكوبي التكراريّة في حلّ الجملة الخطّيّة $A \cdot x = b$ تتقارب.

الإثبــات:

لدينا في هذه الحالة $J = M^{-1}N = D^{-1} \cdot (E + F)$. يقتضي الشرط (14) أنْ يكون:

$$\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < 1 \quad , \quad 1 \leq i \leq n.$$

وهذا بدوره يقتضي صحّة المتراجحة $\|J\|_\infty = \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right) < 1$. $\blacksquare$

مبرهنــة 6 : **إذا** كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ذات **قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً** وكان $0 < \omega \leq 1$ فإنّ طريقة SOR التكراريّة في حلّ الجملة الخطّيّة $A \cdot x = b$ **تتقارب**.

الإثبــات:

نعلم أنّ مصفوفة تكرار طريقة SOR تكتب بالشكل

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\omega &= (D - \omega \cdot E)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot D + \omega \cdot F] \\
&= (I - \omega \cdot D^{-1}E)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot I + \omega \cdot D^{-1}F]
\end{aligned}
$$

بوضع $L = D^{-1}E$ و $U = D^{-1}F$ يكون

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot I + \omega \cdot U]$$

من ذلك نجد أنّ كثير الحدود المميّز لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ يكتب بالشكل

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - \mathcal{L}_\omega) &= \det\left(\lambda \cdot I - (I - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot I + \omega \cdot U]\right) \\
&= \det\left(\lambda \cdot (I - \omega \cdot L) - (1-\omega) \cdot I - \omega \cdot U\right) \\
&= \det\left((\lambda + \omega - 1) \cdot I - \lambda\omega \cdot L - \omega \cdot U\right) \\
&= (\lambda + \omega - 1)^n \cdot \det\left(I - \frac{\lambda\omega \cdot L}{\lambda + \omega - 1} - \frac{\omega \cdot U}{\lambda + \omega - 1}\right)
\end{aligned}
$$

نضع

$$\alpha = \frac{\lambda\omega}{\lambda + \omega - 1} \quad , \quad \beta = \frac{\omega}{\lambda + \omega - 1}$$

عندئذٍ، تكون λ قيمةً ذاتيّة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ ، أيْ $p(\lambda) = 0$ إذا تحقق واحد من الشرطين:

$$\lambda = 1 - \omega \quad , \quad \det(I - \alpha L - \beta U) = 0.$$

لنفترض أنّ λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ تحقق $1 \le |\lambda|$. نرى في هذه الحالة أنّه من المستحيل أن يكون $\lambda = 1 - \omega$ (لأنّ $|\lambda| = 1 - \omega < 1$). لنبرهن أيضاً استحالة تحقق الشرط الثاني $\det(I - \alpha L - \beta U) = 0$.

نضع

$$\lambda = a\, e^{i\theta}, \quad a \ge 1.$$

عندها يكون

$$|\beta|^2 \le |\alpha|^2 = \frac{a^2\omega^2}{(a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2 \sin^2\theta}$$

ولكن، لدينا

$$
\begin{aligned}
(a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2 \sin^2\theta &= a^2 - 2a(1-\omega)\cos\theta + (1-\omega)^2 \\
&\ge a^2 - 2a(1-\omega) + (1-\omega)^2 = (a - 1 + \omega)^2
\end{aligned}
$$

ففي حالة $a > 1$ و $0 < \omega \le 1$ يكون:

$$
\begin{aligned}
\left(a \cdot (1-\omega) > 1 - \omega\right) &\Leftrightarrow (a - 1 + \omega > a \cdot \omega) \\
&\Leftrightarrow \left((a - 1 + \omega)^2 > a^2 \cdot \omega^2\right)
\end{aligned}
$$

نستنتج مما سبق أنّ $1 > |\alpha| \geq |\beta|$.

من جهةٍ أخرى، المصفوفة $D^{-1}A = I - L - U$ (كما هي حال المصفوفة A) ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً، وكذلك الحال بالنسبة للمصفوفة $I - \alpha L - \beta U$ والتي تنتج عن المصفوفة $I - L - U$ بضربِ العناصر غير القطرية بأعدادٍ لا تتجاوز الواحد بالقيمة المطلقة، فهي إذن ذات قطرٍ مسيطر تماماً. ومن ثمّ فهي قلوبة وهذا يعني أنّ

$$\det(I - \alpha L - \beta U) \neq 0$$

وهو المطلوب. ■

ملاحظــة: **المبرهنة 6** السابقة ليست سوى **شرط كافٍ** لتقارب طريقة SOR في حالة جملة خطيّة $A \cdot x = b$ مصفوفتها ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فهي لا تثبت عدم تقارب طريقة SOR عندما يكون $\omega > 1$. يبيّن المثال التالي تقارب طريقة SOR أياً كانت قيمة الوسيط ω في المجال $0 < \omega < 2$ علماً أنّ مصفوفة الجملة الخطية $A \cdot x = b$ ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\dfrac{\omega}{2} \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}$$

للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ قيمة ذاتيّة مضاعفة هي $\lambda = 1 - \omega$. إذن، تتقارب طريقة SOR في هذه الحالة إذا تحقّق الشرط $|1 - \omega| < 1$ أيْ $0 < \omega < 2$.

3.3. حالــة المصفوفات المتنــاظرة والمعرّفــة موجبــة

ندرس في هذه الفقرة تقارب مجموعة الطرائق التكراريّة التي عرضناها سابقاً في حالة جملة معادلات خطيّــة مصفوفتها متنــاظرة ومعرّفــة موجبــة.

مبرهنــة 7 : لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة **متناظرة ومعرفة موجبة**. وليكن $A = M - N$ تحليلاً فيه المصفوفة M **قلوبة**. **إذا** افترضنا أنّ المصفوفة المتناظرة $M^T + N$ **معرفّة موجبة فإنّ**

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

الإثبــات:

المصفوفة $M^T + N$ متناظرة لأنّ

$$M^T + N = A^T + N^T + N = A + N + N^T = M + N^T.$$

لنبرهن الآن أنّ $\|M^{-1} . N\| < 1$ في حالة النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي:

$$\|\ \| : v \in \mathbb{R}^n \mapsto \|v\| = (v^T A v)^{1/2}$$

لدينا

$$\|M^{-1}\cdot N\| = \|I - M^{-1}\cdot A\| = \sup_{\|v\|=1}\|v - M^{-1}Av\|$$

نضع $w = M^{-1}Av$. عندئذٍ نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \|v\|^2 - v^TAw - w^TAv + w^TAw\\ &= \|v\|^2 - w^TM^Tw - w^TMw + w^TAw\\ &= \|v\|^2 - w^T(M^T+N)w\end{aligned}$$

ومن ثمّ، يكون

$$\|v\| = 1 \Rightarrow \|v - M^{-1}Av\| < 1$$

وذلك لأنّ المصفوفة M^T+N معرّفة موجبة حسب الفرض، أيْ:

$$v \neq 0 \Rightarrow w = M^{-1}Av \neq 0 \Rightarrow w^T(M^T+N)w > 0.$$

من جهةٍ ثانية، التطبيق $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \|v - M^{-1}Av\| \in \mathbb{R}$ مستمرٌّ على المجموعة المتراصّة $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ فهو يبلغ حدّه الأعلى عند إحدى نقاط السطح الكروي S بمعنى أنّه يوجد $v^* \in S$ يكون عنده

$$\|v^* - M^{-1}Av^*\| = \sup_{\|v\|=1}\|v - M^{-1}Av\| < 1.$$

وهو المطلوب. ■

نتـــائج

① إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة **متناظرة ومعرّفة موجبة** فإنّ طريقة SOR تتقارب أياً كان $0 < \omega < 2$ (بوجهٍ خاص، عندما $\omega = 1$ تتقارب طريقة غاوص–سايدل).

الإثبـــات:

نعلم أنّ التفريق $A = M - N$ في حالة SOR يكتب بالشكل

$$M - N = \left(\tfrac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\tfrac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

ومنه نجد

$$M^T + N = \tfrac{1}{\omega}D - E^T + \tfrac{1-\omega}{\omega}D + F = \tfrac{2-\omega}{\omega}D$$

وذلك لأن $D = D^T$ و $E^T = F$. المصفوفة D هي مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة (سواءً كانت نقطية أو كتلية) ومن ثمّ فإنّ المصفوفة M^T+N تكون معرّفة موجبة إذا وفقط إذا كان $0 < \omega < 2$. وبالاعتماد على **المبرهنة 7** يتمّ المطلوب. ■

② إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة **متناظرة ومعرّفة موجبة** وكانت المصفوفة $2D - A$ **معرّفة موجبة** فإنّ طريقة جاكوبي (النقطيّة أو الكتليّة) تتقارب.

الإثبـــات:

في هذه الحالة يكون لدينا

$$M^T + N = D + E + F = 2D - D + E + F = 2D - A$$

وبالاعتماد على **المبرهنة 7** يتمّ المطلوب. ■

4. حالـــة المصفوفات ثلاثيّـــة القطرية كِتليـــاً

تعريف: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ إنّها **ثلاثيّة القطريّة كتلياً** إذا كانت تكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ & & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

حيث A_{ii} $(1 \le i \le p)$ مصفوفة مربّعة مرتبتها n_i وتحقق $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.

نستعمل هنا أيضاً التحليل الكتلي من الشكل $A = D - E - F$ حيث D مصفوفة قطرية كتلياً يتشكّل قطرها الرئيس من المصفوفات $(A_{ii})_{1 \le i \le p}$، E مصفوفة مثلثيّة من الأسفل و F مصفوفة مثلثيّة من الأعلى.

مبرهنـــة 8 : لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثيّة القطريّة كتلياً، وليكن $\mu \in \mathbb{C}^*$. نعرّف:

$$A(\mu) = D - \mu\, E - \frac{1}{\mu} F$$

عندها يكون

$$\det A(\mu) = \det A.$$

الإثبـــات:

نعرّف المصفوفة القطريّة كتلياً

$$S = \begin{pmatrix} \mu I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^p I_p \end{pmatrix}$$

حيث I_i تمثّل مصفوفة مطابقة من المرتبة n_i. لدينا

$$\begin{aligned}\det S &= \det(\mu I_1)\cdot\det(\mu^2 I_2)\cdots\det(\mu^p I_p)\\ &= \mu^k \neq 0.\end{aligned}$$

حيث

$$k = n_1 + 2\cdot n_2 + \cdots + p\cdot n_p$$

نلاحظ هنا أنّ

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}\mu^{-1}I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{-p}I_p\end{pmatrix}$$

ومنه، بإجراء عمليّة ضرب المصفوفات كتلياً نجد

$$\begin{aligned}(S\cdot A)_{i\ell} &= \sum_{j=1}^{p} S_{ij}\cdot A_{j\ell} = S_{ii}\cdot A_{i\ell} = \mu^i A_{i\ell},\\ \left(S\cdot A\cdot S^{-1}\right)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{p}(S\cdot A)_{i\ell}\cdot S^{-1}_{\ell j} = (S\cdot A)_{ij}\cdot S^{-1}_{jj} = \frac{\mu^i}{\mu^j}\cdot A_{ij}.\end{aligned}$$

نلاحظ هنا أنّ

$$\begin{aligned}\left(S\cdot A\cdot S^{-1}\right)_{ii} &= A_{ii}, & i &= 1,\ldots,p\\ \left(S\cdot A\cdot S^{-1}\right)_{i,i-1} &= \mu\cdot A_{i,i-1}, & i &= 2,\ldots,p\\ \left(S\cdot A\cdot S^{-1}\right)_{i,i+1} &= \frac{1}{\mu}\cdot A_{i,i+1}, & i &= 1,\ldots,p-1\\ \left(S\cdot A\cdot S^{-1}\right)_{i,j} &= 0, & |i-j| &> 1.\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد برهنّا المساواة

$$A(\mu) = S\cdot A\cdot S^{-1}$$

ومنه

$$\det A(\mu) = \det(S\cdot A\cdot S^{-1}) = \det A.$$

وهو المطلوب. ■

مبرهنــــة 9: لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثيّة القطريّة كتلياً بحيث تكون الكتل القطرية (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

① إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكِتلية $J = D^{-1}(E+F)$ فإنّ $-\lambda$ تكون أيضاً قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة.

② تشترك طريقة جاكوبي الكِتليّة مع طريقة غاوص–سايدل الكِتليّة في طبيعة التقارب (تتقاربا أو تتباعدا معاً).

③ في حالة تقارب طريقة غاوص–سايدل الكتِليّة فإنّ معدّل تقاربها يساوي ضِعْفَي معدّل تقارب طريقة جاكوبي الكتِليّة، أي

$$\Re_\infty(\mathcal{L}_1) = 2 \cdot \Re_\infty(J).$$

الإثبـــات:

① ليكن $P_J(\lambda)$ كثير الحدود المميّز لمصفوفة تكرار جاكوبي $J = D^{-1}E + D^{-1}F$. لدينا

$$P_J(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \det(\lambda I - D^{-1}E - D^{-1}F)$$

ومنه

$$\det D \cdot P_J(\lambda) = \det D \cdot \det(\lambda I - D^{-1}E - D^{-1}F)$$

بتطبيق **المبرهنة 8** على المصفوفة $\lambda D - E - F$ مع $\mu = -1$ نجد

$$\begin{aligned}
\det D \cdot P_J(\lambda) &= \det(\lambda D + E + F) \\
&= (-1)^n \det(-\lambda D - E - F) \\
&= (-1)^n \det D \cdot P_J(-\lambda).
\end{aligned}$$

وبما أنّ $\det D \neq 0$ فإنّ

$$\boxed{P_J(\lambda) = (-1)^n \cdot P_J(-\lambda).}$$

② لندرس الآن كثير الحدود المميّز P_1 لمصفوفة تكرار غاوص–سايدل $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} \cdot F$:

$$P_1(\lambda) = \det\big(\lambda I - (D-E)^{-1}F\big),$$

فإذا كان $\lambda \neq 0$ نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}
\det(D-E) \cdot P_1(\lambda) &= \det\big(\lambda(D-E) - F\big) = \det(\lambda D - \lambda E - F) \\
&= \det\Big(\lambda^{1/2}\big(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \lambda^{-1/2}F\big)\Big) \\
&= \lambda^{n/2} \det\big(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \lambda^{-1/2}F\big).
\end{aligned}$$

وباستخدام **المبرهنة 8** نجد

$$\begin{aligned}
\det\Big(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \frac{F}{\lambda^{1/2}}\Big) &= \det\big(\lambda^{1/2}D - E - F\big) \\
&= \det D \cdot P_J(\lambda^{1/2}).
\end{aligned}$$

ومن ثمّ يكون

$$\det(D-E)\, P_1(\lambda) = \lambda^{n/2} \det D \cdot P_J(\lambda^{1/2}).$$

ولكن لدينا

$$\det(D-E)=\prod_{i=1}^{p}\det A_{ii}=\det D\neq 0,$$

ومن ثمّ يكون

$$\boxed{P_1(\lambda)=\lambda^{n/2}P_J(\lambda^{1/2})}$$

ينتج من هذه العلاقة أنّه إذا كانت $\alpha\neq 0$ قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_1$ فإنّ $\beta=\pm\alpha^{1/2}$ تكون قيماً ذاتيّة للمصفوفة J. وبالعكس، إذا كانت $\beta\neq 0$ قيمة ذاتيّة للمصفوفة J فإنّ $\alpha=\beta^2$ تكون قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_1$.

نستنتج مما سبق، أنّ

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_1)=\rho^2(J)} \tag{15}$$

ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_1)<1\Leftrightarrow\rho(J)<1.$$

أيْ أنّ طريقتا جاكوبي وغاوص–سايدل الكتليّة تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً.

③ من العلاقة (15) لدينا

$$\boxed{\begin{aligned}\Re_\infty(\mathcal{L}_1)&=-\ln\rho(\mathcal{L}_1)=-\ln\rho(J^2)=\\&=-2\cdot\ln\rho(J)=2\cdot\Re_\infty(J).\end{aligned}} \tag{16}$$

نلاحظ هنا أنّ تقارب طريقة غاوص–سايدل الكتليّة أسرع مرّتين من تقارب طريقة جاكوبي الكتليّة في حالة المصفوفات ثلاثيّة القطريّة. ■

مبرهنـــة 10: لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثيّة القطريّة كتلياً بحيث تكون الكتل القطرية (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

- إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي J، وكان η عددٌ يحقق العلاقة:

$$(\eta+\omega-1)^2=\eta\,\omega^2\,\lambda^2. \tag{17}$$

عندئذٍ تكون η قيمة ذاتيّة غير معدومة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$.

- بالعكس، إذا كانت η قيمة ذاتيّة غير معدومة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ وكانت λ قيمة عدديّة تحقق العلاقة (17) فإنّ λ تكون حينئذٍ قيمة ذاتيّة لمصفوفة التكرار J.

الإثبـــات:

القيم الذاتيّة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ هي جذور كثير الحدود المميّز:

$$P_\omega(\eta) = \det\Big(\eta I - (D-E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right)\Big).$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\det(D-\omega E)\cdot P_\omega(\eta) &= \det\left(\eta(D-\omega E) - (1-\omega)D - \omega F\right)\\ &= \det\left((\eta+\omega-1)D - \eta\omega E - \omega F\right).\end{aligned}$$

وباستثناء حالة $\omega = 1$ (حالة غاوص–سايدل التي عالجناها سابقاً) فإنّ 0 ليس قيمةً ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$، لأنّ:

$$\det\left((1-\omega)D + \omega F\right) = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{p} \det A_{ii} \neq 0.$$

ومن ثمّ،

$$\begin{aligned}\det(D-\omega E)\cdot P_\omega(\eta) &= \det\left[\eta^{1/2}\omega\left(\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right)D - \eta^{1/2}E - \frac{1}{\eta^{1/2}}F\right)\right]\\ &= \eta^{n/2}\omega^n \det\left[\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}D - \eta^{1/2}E - \frac{1}{\eta^{1/2}}F\right]\end{aligned}$$

وبتطبيق **المبرهنة 8** نجد

$$\begin{aligned}\det(D-\omega E)\cdot P_\omega(\eta) &= \eta^{n/2}\omega^n \det\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}D - E - F\right)\\ &= \eta^{n/2}\cdot\omega^n\cdot\det D\cdot P_J\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right).\end{aligned}$$

وبما أنّ $\det(D-\omega E) = \det D$ يكون

$$P_\omega(\eta) = \eta^{n/2}\cdot\omega^n\cdot P_J\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right).$$

نستنتج أنّه إذا كانت η قيمة ذاتيّة غير معدومة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ $(\omega \neq 1)$ فإنّ $\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}$ هي قيمة ذاتيّة للمصفوفة J. وبالعكس، إذا كانت λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة J وكانت القيمة η تحقق الشرط $\frac{(\eta+\omega-1)^2}{\eta} = \omega^2\lambda^2$ فإنّ η تكون قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$. ■

مبرهنــة 11: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثيّة القطريّة كتلياً بحيث تكون الكتل القطرية (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

إذا كانت جميع القيم الذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكتليّة حقيقيّة فإنّ كلاً من طريقة جاكوبي وطريقة الـ SOR **تتقاربان معاً** أو **تتباعدان معاً**.

في حالة التقارب، توجد **قيمة أمثليّة** ω^* تعطى بالعلاقة

$$\boxed{\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}}} \tag{18}$$

تجعل المقدار $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغرياً، أيْ أنّ

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \min_{0<\omega<2} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \omega^* - 1} \tag{19}$$

الإثبـــات:

برهنّا سابقاً أنّه إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكتليّـــة فإنّ $-\lambda$ تكون أيضاً قيمةً ذاتيّة لها (**مبرهنة 8**). لتكن η قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$، عندئذٍ تكون η حلاً للمعادلة

$$\eta^2 + (2\omega - 2 - \lambda^2\omega^2)\eta + (\omega-1)^2 = 0 \tag{20}$$

نلاحظ هنا أنّ حلول هذه المعادلة لا تتعلّق بتغيّرات إشارة λ وإنّما تتعلّق فقط بقيمتها المطلقة، ولهذا السبب يكفي أن ندرس تغيّرات η عندما تكون $0 \le \lambda$.

يكتب مميّز المعادلة (20) بالشكل

$$\begin{aligned}\Delta &= (2\omega - 2 - \lambda^2\omega^2)^2 - 4(\omega-1)^2 \\ &= \lambda^2\omega^2(\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4).\end{aligned}$$

فإشارة Δ من إشارة المقدار $\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4$ الذي بدوره يمثّل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية بـ ω مميّزه المختصر هو $\delta = 4(1-\lambda)^2$.

- **حالـــة** $\rho(J) \ge 1$

يوجد عندها على الأقلّ قيمة ذاتيّة λ للمصفوفة J تحقق $1 \le \lambda$ وعندها يكون $0 \le \delta$ ويكون $\Delta \ge \omega^2(\omega-2)^2 \ge 0$ ومن ثمّ يكون للمعادلة (20) جذرين حقيقيين $\eta_2 \le \eta_1$ ويكون

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{L}_\omega) &\ge |\eta_1| \\ &= \frac{1}{2}(\omega^2\lambda^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega\lambda(\omega^2\lambda^2 - 4\omega + 4)^{1/2} \\ &\ge \frac{1}{2}(\omega^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega(\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\omega^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega(2-\omega) = 1.\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّه إذا تباعدت طريقة جاكوبي فإنّ طريقة الـ SOR تتباعد أيضاً (أياً كانت قيمة الوسيط ω).

- **حالـــة** $\rho(J) < 1$

في هذه الحالة يكون $\delta \geq 0$ ومن ثمّ يكون للمُميّز Δ جذرين حقيقيين:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{2-2\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \omega_2 = \dfrac{2+2\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} = \dfrac{2}{1-\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases}$$

وهذان الجذران موجبان لأنّ مجموعهما يساوي $\dfrac{4}{\lambda^2}$ وجداؤهما يساوي أيضاً $\dfrac{4}{\lambda^2}$. بمقارنة هذين الجذرين مع $\omega = 1$ و $\omega = 2$ نجد

$$0 < 1 < \omega_1 < 2 < \omega_2.$$

وبما أنّ $0 < \omega < 2$ تكون تغيّرات إشارة Δ في هذا المجال على النحو التالي

ω	0	1	ω_1		2
Δ	0	$+$	0	$-$	

- $\omega_1 < \omega$

في هذه الحالة يكون $\Delta < 0$ وعندها تكون القيم الذاتيّة $\eta(\lambda)$ للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ عقديّة مترافقة مثنىً مثنى ويكون للمعادلة (20) جذرين عقديين مترافقين جداؤهما يساوي $(\omega-1)^2$ ومن ثمّ

$$|\eta| = \omega - 1 < 1.$$

- $0 < \omega < \omega_1$

في هذه الحالة يكون $\Delta \geq 0$ وتكون القيم الذاتيّة $\eta(\lambda)$ للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ حقيقيّة موجبة، وذلك لأنّ

$$\eta = \frac{(\eta+\omega-1)^2}{\omega^2\lambda^2}$$

نهتم هنا بالقيمة الذاتيّة الكبرى

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2\omega^2 - 2\omega + 2 + \lambda\omega(\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2}}{2}$$

وذلك بهدف تعيين $\max\limits_{\lambda,\omega} |\eta|$ لنحصل على تحديد من الأعلى لنصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{L}_\omega)$. فعندما يكون $0 < \lambda < 1$ و $0 < \omega < 2$ تتحقق المتراجحة التالية

$$\eta_1 < \frac{\omega^2 - 2\omega + 2 + \omega(\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2}}{2} = 1$$

نستنتج من هذا أنّه أياً كانت $0 < \omega < 2$ فإنّ طريقة الـ SOR تتقارب. وهكذا، نكون قد برهنّا أنّ طريقتي جاكوبي و SOR تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً (لهما طبيعة واحدة في التقارب).

نرغب الآن في تعيين القيمة الأمثليّة ω^* للوسيط ω التي تجعل $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغر مايمكن. لذا ندرس تغيّرات η بدلالة ω في المجال $]0,\omega_1]$ مع ثبات القيمة الذاتيّة λ.

باشتقاق العلاقة (17) بالنسبة للوسيط ω نجد

$$2(\eta+\omega-1)+2(\eta+\omega-1)\frac{\partial\eta}{\partial\omega}=\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\omega^2\lambda^2+2\eta\omega\lambda^2$$

ومنه

$$\frac{\partial\eta}{\partial\omega}=\frac{2\omega(\eta\lambda^2-1)+2(1-\eta)}{2(\eta+\omega-1)-\lambda^2\omega^2}$$

وبما أنّ η_1 (قيمة الجذر الأكبر للمعادلة 20) تحقق المتراجحة

$$(2\eta_1+2\omega-2)-\lambda^2\omega^2=\lambda\omega(\lambda^2\omega^2-4\omega+4)>0,$$

فإنّ مقام الكسر $\frac{\partial\eta}{\partial\omega}$ ذو إشارةٍ موجبة. فيما يتعلّق بالبسط، لدينا

$$2\omega(\eta\lambda^2-1)+2(1-\eta)<4(\eta-1)+2(1-\eta)=2(\eta-1)<0$$

لأنّ

$$0<\omega<2,\quad 0<\eta<1,\quad 0\le\lambda<1.$$

ومن ثمّ

$$\frac{\partial\eta}{\partial\omega}<0.$$

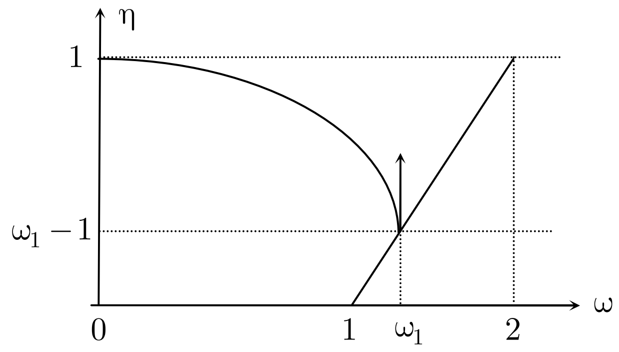
وبهذا نحصل على جدول التغيّرات التـــالي

ω	0	1	ω_1
$\frac{\partial\eta}{\partial\omega}$	$\lambda-1$	$-$	$-\infty$
η	1	$\searrow$	ω_1-1

نلاحظ هنا أنّ

- $\lim\limits_{\substack{\omega\to 0\\ >}}\eta=1$
- $\eta=1-\omega(1-\lambda)+O(\omega^2)$
- $\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\underset{0}{=}(\lambda-1)+O(\omega)\Rightarrow\lim\limits_{\substack{\omega\to 0\\ >}}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}=\lambda-1.$

وعند النقطة $\omega=\omega_1$ يكون $\eta=\omega_1-1$. من جهةٍ ثانية، المشتق $\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}$ غير معرّف عند النقطة $\omega=\omega_1$ ولكن النهاية من اليسار تساوي $-\infty$. بتجميع الدراسة السابقة نحصل على منحني $|\eta(\omega)|$ في المجال $0<\omega<2$ (مع ثبات قيمة λ)



من الواضح أنّ القيمة الأصغريّة للتابع $|\eta(\omega)|$ تكون عندما $\omega=\omega_1$. لندرس الآن تغيّرات $|\eta|$ بدلالة λ عندما $0\le\lambda<1$. لدينا من العلاقة (17)

$$2\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}(\eta+\omega-1)=\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\omega^2\lambda^2+2\eta\omega^2\lambda$$

أو

$$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}=\frac{2\eta\lambda\omega^2}{2(\eta+\omega-1)-\lambda^2\omega^2}.$$

المقام هنا موجب (كما رأينا سابقاً) وكذلك الحال بالنسبة للبسط. إذن

$$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}>0$$

ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_\omega)=\max_{\lambda\in Sp(J)}|\eta(\lambda)|=|\eta(\rho(J))|=\eta(\rho(J)).$$

أمّا القيمة الأمثليّة ω^* والتي تحقق

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_{\omega^*})=\min_{0<\omega<2}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\eta(\omega^*)=\omega^*-1}$$

فهي

$$\boxed{\omega^*=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}}}$$

وبذا يتمّ المطلوب. ∎

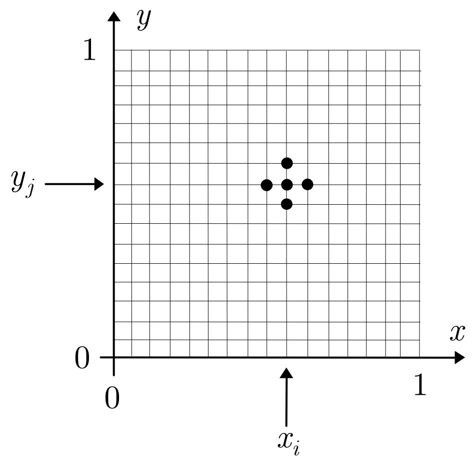
5. تطبيـــق: الحل العددي لمسألة بواسون بطريقـــة الفروق المنتهيـــة

ندرس في هذه الفقرة مسألة بواسون Poisson في المربّع $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ (مسألة Dirichlet):

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = g(x,y) & \text{if } (x,y)\in \mathring{\Omega} \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{if } (x,y)\in \partial\Omega. \end{cases} \qquad (21)$$

حيث $\partial\Omega = \Omega \setminus \mathring{\Omega}$ يمثّل مجموعة النقاط المحيطيّة للمربّع Ω. g و f تابعان معروفان.

نبحث عن حلٍّ عددي للمسألة باستخدام **طريقة الفروق المقسومة بخمس نقاط** مبنيّة على شبكة مربّعة خطوتها $h = \Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{n}$.



شبكة النقاط المربّعة Ω_h.

نعرّف

$$\Omega_h = \left\{(x_i,y_j) = (ih, jh), \quad 0\le i,j\le n\right\} \qquad \text{"شبكة النقاط"}$$

$$\partial\Omega_h = \left\{(x_i,0),(x_i,1),(0,y_j),(1,y_j), \quad 0\le i,j\le n\right\} \qquad \text{"النقاط المحيطيّة"}$$

$$\mathring{\Omega}_h = \Omega_h \setminus \partial\Omega_h \qquad \text{"النقاط الداخليّة"}$$

⌫ **نذكّر هنا بالخاصّة التحليليّة التاليـــة:**

إذا كان $G\in C^4([x-h,x+h])$ فإنّ

$$G''(x) = \frac{G(x+h)-2G(x)+G(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}G^{(4)}(\xi), \quad x-h\le\xi\le x+h.$$

فإذا افترضنا أنّ حلّ المسألة (P) كان نظامياً بما يكفي فإننا نستطيع أن نكتب:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\dfrac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}\right)=g_{i,j}+\dfrac{h^2}{12}\left[\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,y_j)+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i,\eta_j)\right] \\ 1\le i,j\le n-1. \end{cases}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} u_{i,j}&=u(x_i,y_j) \\ g_{i,j}&=g(x_i,y_j) \end{aligned}\right|_{0\le i,j\le n}, \qquad \left.\begin{aligned} x_{i-1}\le \xi_i\le x_{i+1} \\ y_{i-1}\le \eta_j\le y_{j+1} \end{aligned}\right|_{1\le i,j\le n-1.}$$

وهذا يقودنا إلى **المسألة المنقطعة** التاليـــة:

$$(P_h)\qquad \begin{cases} -\Delta_h u_h(x_i,y_j)=g(x_i,y_j), & 1\le i,j\le n-1, \\ \quad u_h(x_i,y_j)=f(x_i,y_j), & i\in\{0,n\}\ \vee\ j\in\{0,n\} \end{cases}$$

حيث

$$-\Delta_h u_h(x_i,y_j)=\frac{1}{h^2}\Big(4(u_h)_{ij}-(u_h)_{i+1,j}-(u_h)_{i-1,j}-(u_h)_{i,j+1}-(u_h)_{i,j-1}\Big)$$

- **الشروط عند الأطراف**

يؤول الشرط عند الأطراف $u(x,y)=f(x,y)$ في المسألة (P) إلى شروط عددية عند النقاط المحيطيّة $\partial\Omega_h$:

$$u_h(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)=f_{i,j},\quad (x_i,y_j)\in\partial\Omega_h.$$

- **جملة المعادلات الخطّيـــة**

بترقيم نقاط الشبكة من اليسار إلى اليمين ومن الأسفل إلى الأعلى نحصل من المسألة (P_h) على جملة معادلات خطيّة بالمجاهيل $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n-1}$ مصفوفتها من الشكل

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} G & -I & & & \\ -I & G & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & G & -I \\ & & & -I & G \end{pmatrix}$$

حيث I هي مصفوفة مطابقة من المرتبة $n-1$ ، G: مصفوفة مربعّة من المرتبة $n-1$ من الشكل:

$$G=\begin{pmatrix}4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4\end{pmatrix}$$

المصفوفة A **ثلاثيّة القطريّة كِتلياً ومتناظرة**. وهي أيضاً **ذات قطر رئيسٍ مسيطر**. وبما أنّ عناصر قطرها الرئيس **موجبة تماماً** $(a_{ii}=4)$ فإنّ قيمها الذاتيّة تكون بالضرورة **موجبة تماماً**. إذنْ، A **معرّفة موجبة**.

مبرهنـــة 12:أياً كانت قيمة $n \geq 2$ فإنّ المسألة (P_h) تقبل حلاً وحيداً $\left\{u_h(x_i,y_j):0\leq i,j\leq n\right\}$. إضافةً لذلك، إذا كان حل مسألة بواسون $u\in C^4(\Omega)$ فإنّ:

$$\max_{0\leq i,j\leq n}\left|u(x_i,y_j)-u_h(x_i,y_j)\right|\leq c\cdot h^2. \tag{22}$$

حيث

$$c=\frac{1}{24}\left(\max_{0\leq x,y\leq 1}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,y)\right|+\max_{0\leq x,y\leq 1}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y)\right|\right).$$

لنبحث الآن في تعيين نصف القطر الطيفي لكلّ من الطرائق التكراريّة: جاكوبي، غاوص–سايدل و طريقة SOR وذلك في الحالتين **النقطيّة والكتليّة**.

يمكن التحقق بسهولة من أنّ القيم الذاتيّة $\lambda_{i,j}$ والأشعّة الذاتيّة $V_{i,j}$ للمصفوفة A تعطى بالعلاقات:

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}&=\frac{4}{h^2}\left(\sin^2 i\tfrac{\pi}{2n}+\sin^2 j\tfrac{\pi}{2n}\right),\quad 1\leq i,j\leq n-1,\\ V_{i,j}[p,q]&=\sin(p\,i\tfrac{\pi}{n})\cdot\sin(q\,j\tfrac{\pi}{n}),\quad 1\leq i,j,p,q\leq n-1.\end{aligned}$$

وأنّ أصغر القيم الذاتيّة هي $\lambda_{1,1}=\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2n}$ وأنّ أكبرها هي $\lambda_{n-1,n-1}=\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2n}$.

←الحالـــة النقطيّة

a) طريقة جاكوبي: تعطى مصفوفة التكرار في هذه الحالة بالعلاقـــة:

$$J_p=I-D^{-1}A=I-\frac{h^2}{4}A$$

يتبيّن من ذلك أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة J_p هي $\left\{1-\frac{h^2}{4}\lambda_{i,j}:1\leq i,j\leq n-1\right\}$. أمّا الأشعّة الذاتيّة لهذه المصفوفة فهي ذات الأشعة الذاتيّة للمصفوفة A. لدينا

$$1-\frac{h^2}{4}\lambda_{i,j}=1-\sin^2 i\frac{\pi}{2n}-\sin^2 j\frac{\pi}{2n}=\frac{\cos i\pi h+\cos j\pi h}{2}$$

ومن ثمّ يكون

$$\boxed{\rho(J_p)=\max_{1\le i,j\le n-1}\frac{|\cos i\pi h+\cos j\pi h|}{2}=\cos(\pi h)}$$

ينتج من ذلك أنّ نصف القطر الطيفي لمصفوفة تكرار جاكوبي أصغر تماماً من الواحد، أي أنّ طريقة جاكوبي النقطيّة تتقارب. من جهةٍ ثانية، لدينا

$$\cos(\pi h)=1-\frac{\pi^2h^2}{2}+O(h^4)$$

أي أنّ معدّل التقارب لطريقة جاكوبي النقطيّة يساوي

$$\boxed{\mathfrak{R}_\infty(J_p)=-\ln\left(1-\frac{\pi^2h^2}{2}+O(h^4)\right)\sim\frac{\pi^2h^2}{2}}$$

b) **طريقة غاوص–سايدل**: لدينا في هذه الحالة

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_{1,p})=\rho^2(J_p)=\cos^2(\pi h)=1-\pi^2h^2+O(h^4)}$$

ومن ذلك نستنتج معدّل التقارب لهذه الطريقة

$$\boxed{\mathfrak{R}_\infty(\mathcal{L}_{1,p})=-\ln\rho(\mathcal{L}_{1,p})\sim\pi^2h^2}$$

نلاحظ هنا أيضاً بطء هذه الطريقة ولكنّها أسرع مرتين بالمقاربة مع طريقة جاكوبي النقطيّة.

c) **طريقة SOR**: لدينا في هذه الحالة

$$\omega^*=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J_p)}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\cos^2(\pi h)}}=\frac{2}{1+\sin(\pi h)}$$

ومنه

$$\boxed{\begin{aligned}\rho\left(\mathcal{L}_{\omega^*,p}\right)&=\omega^*(A)-1=\frac{2}{1+\sin(\pi h)}-1=\frac{1-\sin(\pi h)}{1+\sin(\pi h)}\\&=\frac{1-\pi h+O(h^3)}{1+\pi h+O(h^3)}=1-2\pi h+O(h^2)\end{aligned}}$$

ويعطى معدّل التقارب بالعلاقة

$$\boxed{\mathfrak{R}_\infty(\mathcal{L}_{\omega^*,p})\sim 2\pi h}$$

نلاحظ في هذه الحالة أنّ معدّل التقارب أصبح من رتبة h مقارنةً بالحالتين السابقتين حيث كان من رتبة h^2.

ملاحظـــة: إن الربح الذي نجنيه من استعمال القيمة الأمثليّة ω^* في طريقة SOR هامٌّ جداً، وذلك لأنّ

$$\frac{\Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega^*,p})}{\Re_\infty(\mathcal{L}_{1,p})} = \frac{2\pi h}{\pi^2 h^2} = \frac{2}{\pi h} = \frac{2n}{\pi}.$$

فعلى سبيل المثال، في حالة $h = \frac{1}{100}$ تقوم طريقة SOR الأمثليّة بعدد من التكرارات أقلّ بـ $\frac{200}{\pi} \approx 63.662$ مرّة من العدد اللازم لطريقة غاوص–سايدل للوصول إلى الدقّة المطلوبة في حل الجملة الخطّية.

➔ الحالـــة الكتِليّـــة

لدينا في هذه الحالة

$$D_B = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \end{pmatrix}$$

لنبرهن أنّ الأشعة الذاتيّة $V_{i,j}$ للمصفوفة A هي أيضاً أشعّة ذاتيّة للمصفوفة D_B. في الواقع

$$\begin{aligned} D_B V_{i,j}[p,q] &= \frac{1}{h^2}\left\{4\sin\left(pi\tfrac{\pi}{n}\right)\sin\left(qj\tfrac{\pi}{n}\right) - \sin\left[(p+1)i\tfrac{\pi}{n}\right]\sin\left(qj\tfrac{\pi}{n}\right) - \sin\left[(p-1)i\tfrac{\pi}{n}\right]\sin\left(qj\tfrac{\pi}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{h^2}\left\{\sin\left(qj\tfrac{\pi}{n}\right)\cdot\left[4\sin\left(pi\tfrac{\pi}{n}\right) - \sin\left[(p+1)i\tfrac{\pi}{n}\right] - \sin\left[(p-1)i\tfrac{\pi}{n}\right]\right]\right\} \\ &= \frac{2}{h^2}\sin\left(qj\tfrac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(pi\tfrac{\pi}{n}\right)\cdot\left[2-\cos\left(i\tfrac{\pi}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

ومن ثمّ، يكون

$$\boxed{D_B \cdot V_{i,j} = \frac{2}{h^2}\left[2-\cos\left(i\tfrac{\pi}{n}\right)\right]\cdot V_{i,j}}$$

وبما أنّ الأشعّة $V_{i,j}$ هي أشعة ذاتيّة للمصفوفة A وكذلك للمصفوفة D_B^{-1}، فهي أشعّة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكتِليّة:

$$J_B = I - D_B^{-1}\cdot A.$$

لدينا

$$A\cdot V_{i,j} = \frac{4}{h^2}\left[\sin^2(i\frac{\pi}{2n}) + \sin^2(j\frac{\pi}{2n})\right]\cdot V_{i,j}$$

ومنه

$$J_B \cdot V_{i,j} = \left[1 - \frac{h^2}{2(2-\cos(i\frac{\pi}{n}))} \cdot \frac{4}{h^2}\left(\sin^2(i\frac{\pi}{2n}) + \sin^2(j\frac{\pi}{2n})\right)\right] V_{i,j} = \mu_{i,j} V_{i,j},$$

حيث

$$\mu_{i,j} = \left(1 - \frac{2-\cos(i\pi h)-\cos(j\pi h)}{2-\cos(i\pi h)}\right) = \frac{2}{2-\cos(i\pi h)}.$$

ومن ثمّ

$$\boxed{\rho(J_B) = \max_{i,j}\left|\mu_{i,j}\right| = \left|\mu_{1,1}\right| = \frac{\cos(\pi h)}{2-\cos(\pi h)} = 1 - \pi^2 h^2 + O(h^4)}$$

ويكون معدّل التقارب في هذه الحالة مساوياً

$$\boxed{\Re_\infty(J_B) \sim \pi^2 h^2}$$

نلاحظ هنا أنّ طريقة جاكوبي الكِتليّة أسرع مرّتين من طريقة جاكوبي النقطيّة ($\Re_\infty(J_p) \sim \dfrac{\pi^2 h^2}{2}$).

بالاعتماد على المبرهنات والخواص المتعلّقة بالمصفوفات ثلاثيّة القطريّة، وكون القيم الذاتيّة لمصفوفة جاكوبي حقيقيّة، يكون لدينا

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_{1,B}) \sim 1 - 2\pi^2 h^2 \Rightarrow \Re_\infty(\mathcal{L}_{1,B}) \sim 2\pi^2 h^2}$$

وكذلك

$$\boxed{\rho(\mathcal{L}_{\omega^*,B}) = \frac{1-\sqrt{1-\rho^2(J_B)}}{1+\sqrt{1-\rho^2(J_B)}} \sim \frac{1-\pi h\sqrt{2}}{1+\pi h\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}\,\pi h}$$

ومنه

$$\boxed{\Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega^*,B}) \sim 2\sqrt{2}\,\pi h}$$

نلخّص النتائج السابقة في الجدول التــالي:

	الحالة النقطيّــة			الحالة الكِتليّة		
	جاكوبي	غاوص–سايدل	SOR الأمثليّة	جاكوبي	غاوص–سايدل	SOR الأمثليّة
ρ	$1-\dfrac{\pi^2h^2}{2}$	$1-\pi^2h^2$	$1-2\pi h$	$1-\pi^2h^2$	$1-2\pi^2h^2$	$1-2\sqrt{2}\,\pi h$
$\Re_\infty$	$\dfrac{\pi^2h^2}{2}$	π^2h^2	$2\pi h$	π^2h^2	$2\pi^2h^2$	$2\sqrt{2}\,\pi h$

توضّح الدراسة السابقة أهمّيّة طريقة SOR الأمثليّة (بوسيط أمثلي ω^*). برهنّا فيما سبق أنّه إذا أردنا تخفيض الخطأ الابتدائي بنسبة ε فإنّ عدد التكرارات اللازمة لذلك يتناسب عكساً مع معدّل تقارب الطريقة التكراريّة $\Re_\infty$. فعلى سبيل المثال، إذا كان $\varepsilon = 10^{-6}$ ، $h = 10^{-2}$ فإنّ عدد التكرارات اللازم للوصول إلى الدقّة المطلوبة يكون من رتبة

$$\frac{-\ln 10^{-6}}{\Re_\infty} = \frac{6\ln 10}{\Re_\infty} \approx \frac{14}{\Re_\infty}.$$

بتطبيق ذلك على الطرائق التكراريّة السابقة نحصل على النتائج التاليـــة:

	الحالة الكتليّة			الحالة النقطيّـــة		
	SOR الأمثليّة	غاوص–سايدل	جاكوبي	SOR الأمثليّة	غاوص–سايدل	جاكوبي
عدد التكرارات	157	7092	14185	222	14185	28370

6. مسائل وتمارين

1.6 ليكن $a \in \mathbb{R}$ ولتكن $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ من الشكل

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -4a & 1 \end{pmatrix}.$$

أوّلاً: احسب كلاً من $\rho(J)$ و $\rho(\mathcal{L}_1)$ بدلالة الوسيط a.

ثانيــاً: نفرض $a = 1/4$. برهن أنّ $\rho(\mathcal{L}_{1/2}) < 1$ وأنّ

$$\rho(\mathcal{L}_{1/2}) < \frac{1+\rho(J)}{2}.$$

2.6 ليكن $a \in \mathbb{R}$ ولتكن $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ من الشكل

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

أوّلاً: عيّن قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تجعل المصفوفة A معرّفة موجبة.

ثانيــاً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تتقارب عندها طريقة غاوص–سايدل؟

ثالثــاً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تتقارب عندها طريقة جاكوبي؟

رابعاً: عيّن مصفوفة تكرار طريقة غاوص–سايدل $\mathcal{L}_1$ واحسب نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{L}_1)$.

خامساً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تكون عندها طريقة غاوص–سايدل أسرع من طريقة جاكوبي؟

.3.6 ليكن

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

نعرّف الطريقة التكراريّة

$$x_{k+1} = B \cdot x_k - b, \quad k \geq 0.$$

أوّلاً: بيّن أنّ $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ يحقق المعادلة $x = B \cdot x - b$.

ثانياً: ليكن $x_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$. احسب x_k بدلالة ε. هل تتقارب المتتالية $(x_k)_{k\geq 0}$ إلى $\overline{x}$ ؟

ثالثاً: نختار الآن $x_0 = \begin{bmatrix} 1+2\varepsilon \\ 1-9\varepsilon \end{bmatrix}$. هل تتقارب المتتالية $(x_k)_{k\geq 0}$ إلى $\overline{x}$ ؟ اشرح لماذا. بيّن (من وجهة النظر العدديّة) إمكان استعمال هذه النتيجة ؟

.4.6 لتكن $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ معرّفة بالعلاقة $A = I + E + F$ حيث

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

لتكن $\mathcal{L}_\omega$ مصفوفة تكرار طريقة SOR الموافقة لهذا التحليل، أيْ

$$\mathcal{L}_\omega = (I + \omega E)^{-1} \cdot \big((1-\omega)I - \omega F\big).$$

أوّلاً: احسب بدلالة ω القيم الذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ ومن ثمّ استنتج نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{L}_\omega)$.

ثانياً: عيّن قيم الوسيط ω التي تتقارب عندها طريقة SOR. عيّن قيمة الوسيط الأمثلي ω^* الذي يجعل $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغرياً.

.5.6 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة و $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولتكن جملة المعادلات الخطّيّــة:

$$\begin{aligned} A \cdot z_1 + B \cdot z_2 &= b_1 \\ B \cdot z_1 + A \cdot z_2 &= b_2 \end{aligned}$$

حيث z_1، z_2، b_1 و b_2 أشعّة من $\mathbb{R}^n$. نضع $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

أوّلاً: أوجد شرطاً لازماً وكافياً لتقارب كلٍّ من الطريقتين التكراريّتين التاليـــتين:

$$(i) \quad Z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \cdot B \\ -A^{-1} \cdot B & 0 \end{pmatrix} \cdot Z_k + \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot b_1 \\ A^{-1} \cdot b_2 \end{pmatrix}, \qquad k \geq 0.$$

$$(ii) \quad Z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \cdot B \\ 0 & -(A^{-1} \cdot B)^2 \end{pmatrix} \cdot Z_k + \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot b_1 \\ A^{-1} \cdot (b_2 - B \cdot A^{-1} \cdot b_1) \end{pmatrix}, \qquad k \geq 0.$$

ثانياً: قارن معدّلات تقارب الطريقتين السابقتين.

6.6. لتكن $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة من الشكل

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & F \\ \hline F^* & 0 \end{array}\right], \qquad F \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C}).$$

ولتكن الجملة الخطّية $(I - B) \cdot x = b$.

أوّلاً: عيّن مصفوفة تكرار جاكوبي J ومصفوفة تكرار غاوس–سايدل $\mathcal{L}_1$.

ثانياً: ماذا نستطيع أن نقول عن $\rho(J)$ و $\rho(\mathcal{L}_1)$؟

ثالثاً: أثبت صحّة العلاقة

$$\left\| \mathcal{L}_1^k \right\|_2 = \rho(B)^{2k-1} \sqrt{1 + \rho^2(B)}.$$

7.6. لتكن $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. نفترض وجود عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ ونظيم مصفوفاتي ملحق $\| \ \|$ بحيث يكون

$$\|B\| \leq \alpha < 1.$$

- **الجزء الأوّل:** لتكن متتالية الأشعّة

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c \qquad k \geq 0. \end{cases}$$

أوّلاً: برهن تقارب المتتالية (x_k). ما العلاقة التي تحققها النهاية $\overline{x}$؟

ثانياً: نعرّف متتالية الرواسب الموافقة للمتتالية (x_k) بالعلاقـــة

$$r_k = c - (I-B)\cdot x_k, \quad k \geq 0.$$

برهن صحّة العلاقات التالية

$$\left.\begin{aligned} r_k &= x_{k+1} - x_k \\ r_{k+1} &= B\cdot r_k \end{aligned}\right\} \quad k \geq 0.$$

واستنتج أنّ

$$x_{k+1} = x_0 + (I + B + \cdots + B^k)\cdot r_0.$$

ثالثاً: أثبت أنّ

$$\overline{x} = x_0 + (I-B)^{-1}\cdot r_0$$

وكذلك

$$\overline{x} = x_k + B^k (I-B)^{-1}\cdot r_0.$$

رابعاً: أثبت أنّ

$$\left\|(I-B)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|B\|},$$

واستنتج المتراجحة التاليـــة

$$\|\overline{x} - x_k\| \leq \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\|r_0\|.$$

خامساً: لتكن المصفوفة

$$B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

اختر نظيماً مصفوفاتياً ملحقاً وأوجد تقديراً مناسباً للعدد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\|B\| \leq \alpha < 1$، واستنتج حدّاً أعلى لعدد التكرارات m اللازم لكي يكون

$$\|\overline{x} - x_m\| \leq \varepsilon$$

حيث ε عددٌ معطى.

- **الجزء الثـــاني:** ليكن $\omega \neq 0$ عدداً حقيقيّاً. نعرّف المتتالية

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y_1 = B \cdot y_0 + c,$$
$$y_{k+1} = \omega(B \cdot y_k + c - y_{k-1}) + y_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

أوّلاً: برهن أنّه في حالة تقارب المتتالية (y_k) فإنّ النهاية هي $\overline{x}$؟

نهدف في هذا الجزء إلى تعيين القيمة الأمثليّة للوسيط ω التي تجعل معدّل تقارب المتتالية (y_k) أعظمياً.

ثانياً: نضع $e_k = y_k - \overline{x}$. برهن أنّه توجد مصفوفة $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ يطلب تعيينها بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_k \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k-1} \end{bmatrix}, \quad k \geq 1.$$

ثالثاً: استخدم الأشعة الذاتيّة للمصفوفة B في التعبير عن القيم الذاتيّة للمصفوفة C بدلالة القيم الذاتيّة (التي نفترضها حقيقيّة) للمصفوفة B. استنتج القيمة الأمثليّة للوسيط ω بدلالة $\rho(B)$.

رابعاً: نفترض $\rho(B) = 1 - \eta$ حيث $\eta > 0$ بجوار الصفر. أوجد معدّل التقارب الأمثلي لهذه الطريقة. ما الربح الذي نجنيه بالمقارنة مع الجزء الأوّل؟

8.6. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. وليكن $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تقريباً للمقلوب A^{-1}. يهدف هذا التمرين إلى توضيح خوارزميّة تسمح بحساب تقريب أفضل للمقلوب A^{-1} وذلك بإنشاء متتالية من المصفوفات تتقارب إليها. نضع $E_0 = A^{-1} - X_0$. نفترض أنّ $\|E_0\| \leq \varepsilon < 1$.

أوّلاً: برهن أنّ

$$I = A \cdot X_0 + A \cdot E_0$$

واستنتج أنّ

$$A^{-1} = 2\,X_0 - X_0 \cdot A \cdot X_0 + E_0 \cdot A \cdot E_0$$

وأثبت المتراجحة

$$\|E_0 \cdot A \cdot E_0\| \leq \varepsilon^2.$$

ثانياً: نعرّف المتتالية

$$X_k = 2X_{k-1} - X_{k-1} \cdot A \cdot X_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

ونضع

$$E_k = A^{-1} - X_k$$

برهن أنّ

$$E_k = E_{k-1} \cdot A \cdot E_{k-1}$$

واستنتج أنّ

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}.$$

وأنّ هذا التقارب تربيعي أي أنّ $\|E_k\| = O\left(\|E_{k-1}\|^2\right)$.

ثالثاً: نعرّف المتتالية

$$Y_k = I - A \cdot X_k, \quad k \geq 0.$$

أثبت أنّ

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & X_k = X_{k-1}(I + Y_{k-1}), \\ (2) & Y_k = Y_{k-1}^2. \end{array}\right\} \quad k \geq 1.$$

واستنتج أنّ

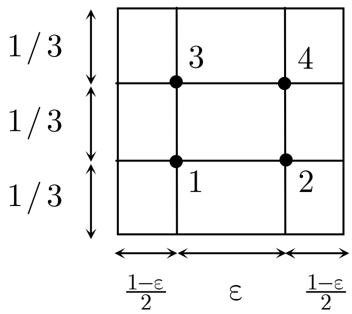
$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-1}\left(I + Y_0^{2(k-1)}\right) \\ &= X_0\,(I + Y_0)\left(I + Y_0^2\right)\cdots\left(I + Y_0^{2(k-1)}\right). \end{aligned}$$

ملاحظــة: **تمثّل علاقات التدريج (1) و (2) خوارزميّة *Hoteling-Bodewig* التي تسمح بإيجاد تقريب جيّد للمقلوب** A^{-1}.

9.6. ليكن $\Omega = [0,1]\times[0,1]$. ولتكن المسألة التفاضليّة التالية

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathring{\Omega} \\ u(x,y) = 1 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}؛$$

نقطّع الساحة Ω بشبكةٍ فيها أربع نقاط داخليّة كما في الشكل التالي



أوّلاً: اكتب المعادلات الخطيّة (بدلالة ε) التي نحصل عليها بتطبيق طريقة الفروق المنتهية بتقريب المؤثّر Δ بخمسة نقاط.

ثانياً: استنتج مصفوفة تكرار جاكوبي $J(\varepsilon)$.

ثالثاً: احسب قيمة $\rho\left(J(\varepsilon)\right)$.