الباب الخامس
حساب التفاضل والتكامل لدالة المتغير الواحد
Calculus of one variable Functions

سنتناول فى هذا الباب أساسيات حساب التفاضل والتكامل فى متغير واحد كالنهايات والإتصال والإشتقاق للدوال الحقيقية فى متغير واحد (الدالة $f(x)$ التى لها كل من النطاق Domain والمدى Range مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية) وبعض التطبيقات كالقيم العظمى والصغرى ومتسلسلة تايلور، تحويل لابلاس، تحويل فورير.

5-1 تفاضل دوال فى متغير واحد
Differentiation for Functions of one variable

النهايات والإتصال Limits & Continuity

لابد أن نعلم أن لأي دالة يمكن أن توجد نهاية يمنى Right Limit فقط أو نهاية يسرى Left Limit فقط. أما إذا ما وجد للدالة نهاية يمنى وفى الوقت نفسه نهاية يسرى متساويتين يقال في هذه الحالة أن للدالة نهاية. يمكن للقارئ الرجوع لأى كتاب من كتب التفاضل والتكامل لدراسة المفهوم الرياضى.

يقال للدالة أنها متصلة عند النقطة x=a إذا كانت قيمة الدالة عند هذه النقطة f(a) كمية معرفة ، والنهاية اليمنى واليسرى للدالة عند هذه النقطة قيمة كل منها هو f(a) .

لإيجاد النهاية اليمنى لدالة ما f(x) عند x=a نستخدم الأمر

```
Limit[f[x], x→a, Direction→a+1]
```

لإيجاد النهاية اليسرى لدالة ما f(x) عند x=a نستخدم الأمر

```
Limit[f[x], x→a, Direction→a-1]
```

مع مراعاة كتابة f(x) بالصيغة التي يقبلها البرنامج.

لإيجاد نهاية دالة ما f(x) عند x=a نستخدم الأمر **Limit[f[x], x→a]** حتى عند اللانهاية.

مثال 1-1-5 لدراسة اتصال الدالة $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ عند x=0

أولا نوجد قيمة الدالة عند x=0 نكتب الأمر

```
f[x_]:=Sin[x]/x;
f[0]
```

سترد إلينا الرسالة التالية والتى تنتهى بكلمة غير محدد Indeterminate

```
Power::infy : Infinite expression 1/0 encountered . More…
∞::indet : Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered . More…
Indeterminate
```

هذا يكفى للحكم على الدالة بأنها غير متصلة عن النقطة x=0.
أما عن إمكانية تغريف الدالة كى تكون متصلة عند x=0 نوجد النهايتين اليمنى واليسرى.

فلنكتب الأمر مع ملاحظة أن علامة → يجب استدعائها من قائمة Basic Math والتى يتم اختيارها من قائمة Input Palletes

```
Limit[Sin[x]/x, x→0, Direction→-1]
```

وسنحصل على النهاية اليسرى وقيمتها 1

أما في حالة النهاية اليمنى الدالة $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ عند x=0

نكتب الأمر

```
Limit[Sin[x]/x, x→0,Direction→+1]
```

وسنحصل على الإجابة 1

أما لايجاد النهاية مباشرة نكتب الأمر

```
Limit[Sin[x]/x, x→0]
```

وسنحصل على الإجابة
.1

يمكننا الآن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند x=0 كالآتى:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

مثال 5-1-2 النهاية اليسرى للدالة $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x}$ عند x=0 نوجدها بالأمر

```
Limit[Cos[x]/x, x→0, Direction→-1]
```

وسنحصل على الإجابة ∞ أى مالانهاية.

أما في حالة النهاية اليمنى الدالة $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x}$ عند x=0

نكتب الأمر

```
Limit[Cos[x]/x, x→0, Direction→1]
```

وسنحصل على الإجابة $-\infty$ أى سالب مالانهاية.

نظرا لعدم تساوى النهايتين اليمنى واليسرى فإن النهاية غير موجودة. على الرغم من ذلك فإن إيجاد النهاية مباشرة يتم بالأمر

```
Limit[Cos[x]/x, x→0]
```

وسنحصل على الإجابة ∞ . **هل لديك تفسير لذلك؟.**

مثال 5-1-3 لدراسة إتصال الدالة $f(x)=\begin{cases} x^3-x, x<-2 \\ 2-x^2, x\ge -2 \end{cases}$ عند x=0

أولا نوجد قيمة الدالة عند x=-2 باستخدام الأمر

```
f[x_/;x<=-2]:=x^3-x
f[x_/;x>-2]:=2-x^2
f[-2]
```

لنحصل على القيمة 6-

النهاية اليسرى نوجدها بتنفيذ الأمر

```
Limit[2-x^2, x→-2]
```

وسنحصل على الإجابة 2-.

في حالة النهاية اليمنى للدالة ننفذ الأمر

```
Limit[x^3-x, x→-2]
```

والإجابة ستكون 6-.فى هذه الحالة لا يمكننا تعريف الدالة لتصبح متصلة عند x=-2 .

مثال 5-1-4 لإيجاد نهاية الدالة $f(x)=\frac{\cos(x)}{x}$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{2}$ نكتب الأمر

```
Limit[Cos[x]/x, x→Pi/2]
```

وستكون الإجابة 0.

مثال 5-1-5 لإيجاد نهاية الدالة $f(x)=\frac{2x^2}{1-x^2}$ عند اللانهاية ننفذ الأمر

```
Limit[2x^2/(1-x^2), x→∞]
```

مع ملاحظة أن علامة ∞ يجب استدعائها من قائمة Basic Math Input والتى يتم اختيارها من قائمة Palletes لنحصل على القيمة 2-.

الاشتقاق Derivative

رياضيا للمشتقة تطبيقات عدة منها ميل المماس للمنحنى الممثل بالدالة التى نوجد مشتقتها، وقيمة المشتقة عند نقطة ما هو ظل الزاوية التى يميل بها المماس للمنحنى عند تلك النقطة على الإتجاه الموجب لمحور السينات، وأيضا سرعة الجسم الذى تتمثل حركته بالإزاحة كدالة فى الزمن.

تعرف المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالصورة التالية:

$$\frac{df(x)}{dx}=\underset{h\to 0}{Limit}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

قبل التطرق لأوامر الإشتقاق وقواعده سنحسب باستخدام تعريف المشتقة بالمثال التالى:

مثال 5-1-6 لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=3x^2+2x-1$ باستخدام تعريف المشتقة ندخل أولا الدالة متبوعة بصيغة ايجاد المشتقة حسب التعريف متبوعا بأمر ايجاد النهاية كما يلى:

```
f[x_]:=3x^2+2x-1; expr=(f[x+h]-f[x])/h;
    Limit[expr, h→0]
```

لتكون الإجابة هى 2+6 x.

الأمر **D[f(x), x]** يستخدم فى إيجاد المشتقة للدالة القابلة للتفاضل بعد تعريف البرنامج بالرموز التى أستخدمت فى الدالة فلإيجاد المشتقة الأولى بالنسبة للمتغير x للدالة f(x) يكون الأمر فى الصورة D[f(x),x]. الجدول التالي يعطى مشتقات بعض الدوال

$f(x)$	$\frac{df(x)}{dx}$
x^n	nx^{n-1}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\cos ec^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\cos ec(x)$	$-\cos ec(x)\cot an(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log(a)$

ومن أهم قوانين الاشتقاق قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين f(x) ، g(x) ومشتقة خارج قسمتهم.

$$\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{(g(x))^2} \quad ,$$

$$\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = g(x)\frac{df}{dx} + f(x)\frac{dg}{dx}$$

لكن في هذا البرنامج لإيجاد مشتقة دالة ما f(x) نستخدم الأمر **D[f(x), x]** مع مراعاة كتابة f(x) بالصيغة التي يقبلها البرنامج.

مثال 5-1-5 لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{\sin(2x) - \tan(3x) + e^{2x}}$ نكتب الأمر فى الصورة

```
D[(x^2-2x+3)/(Sin[2x]-Tan[3x]+Exp[2x]), x]
```

وسنحصل على الإجابة

$$-\frac{(3-2x+x^2)(2e^{2x}+2\,\text{Cos}[2x]-3\,\text{Sec}[3x]^2)}{(e^{2x}+\text{Sin}[2x]-\text{Tan}[3x])^2} + \frac{-2+2x}{e^{2x}+\text{Sin}[2x]-\text{Tan}[3x]}$$

تنبيه 5-1-1 يراعى حساسية البرنامج من حيث احتفاظه بقيم ونوعية المدخلات فمثلا بإعطاء قيمة للمتغير المستقل x ثم تنفيذ أمر الاشتقاق لن يقوم البرنامج بايجاد المستقة للتأكد من ذلك نفذ الأمر

```
x=1;D[Sin[x],x]
```

ستحصل على

```
General::ivar :  1 is not a valid variable. ≫
∂1Sin[1]
```

قم بتنفيذ الأمر Clear ليقوم باستعادة التعرف على x كمتغير، حيث أن قيمة x=1 التى تم ادخالها فى التنبيه السابق مازالت بذاكرة البرنامج، ثم تنفيذ أمر الاشتقاق كما يلى:

```
Clear[x]
D[Sin[x],x]
```

لينتج المشتقة المطلوبة Cos[x].

مثال 5-1-6 لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = x^{x-1}$ ننفذ الأمر

```
D[x^(x-1), x]
```

والناتج

$$x^{-1+x}\left(\frac{-1+x}{x}+\text{Log}[x]\right)$$

من المعروف رياضيا أنه لا يمكن الاشتقاق المباشر لمثل تلك الدالة ويفضل قبل الاشتقاق أخذ لوغاريتم الطرفين.

أى أن بفرض $y = x^{x-1}$ وأخذ لوغاريتم الطرفين $\log(y) = (x-1)\log(x)$ ثم بالاشتقاق بالنسبة إلى x للطرفين

نحصل على $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x-1)\frac{1}{x} + \log(x)$ ومنها ينتج أن $\frac{dy}{dx} = y[(x-1)\frac{1}{x} + \log(x)]$. ثم بالتعويض عن $y = x^{x-1}$ تصبح صور المشتقة المطلوبة $\frac{dy}{dx} = x^{x-1}[(x-1)\frac{1}{x} + \log(x)]$.

الاشتقاق الضمنى Implicit Differentiation

فى حالة ارتباط المتغير التابع y بالمتغير المستقل x فيما يسمى بالدالة الضمنية مثال $\sin\sqrt{xy+4} = y^2x^3 - 5x$ أى الارتباط فى صورة معادلة لذلك أشرنا فى الأمر المستخدم فى إيجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالرمز eq بدلا من f ليكون فى الصورة Dt[eq, x].

مثال 5-1-7 لإيجاد المشتقة الثالثة للدالة $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 7x + 5$
نكتب الأمر فى الصورة

```
implicitder = Dt[Sin[√(y+4)] == y^2 x^3 - 5 x, x]
```

وناتج تنفيذ الأمر

$$\frac{\text{Cos}[\sqrt{4+y}]\ \text{Dt}[y, x]}{2\sqrt{4+y}} == -5 + 3x^2y^2 + 2x^3y\,\text{Dt}[y, x]$$

والذى يحتوى على Dt [y,x] والتى تعنى $\frac{dy}{dx}$ ولايجاد $\frac{dy}{dx}$ نحل المعادلة الناتجة بالنسبة الى Dt [y,x] بالأمر

```
Solve[implicitder, Dt[y,x]]
```

والمشتقة $\frac{dy}{dx}$ الناتجة هى

$$\left\{\left\{\text{Dt}[y, x] \to -\frac{2\sqrt{4+y}\ (-5+3x^2y^2)}{4x^3y\sqrt{4+y} - \text{Cos}[\sqrt{4+y}]}\right\}\right\}$$

المشتقات العليا Higher Derivatives

تعرضنا فيما سبق لايجاد المشتقة الأولى للدوال الحقيقية ويمكننا أيضا إيجاد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ والثالثة $\frac{d^3y}{dx^3}$ وهكذا...
الأمر **D[f(x),{ x,n}]** يستخدم فى إيجاد المشتقة النونية للدالة f بالنسبة للمتغير x.

مثال 5-1-8 لإيجاد المشتقة الثالثة للدالة $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 7x + 5$
نكتب الأمر فى الصورة

```
D[x^5-2x^3+3x^2+7x+5, {x,3}]
```

وسنحصل على الإجابة

$$-12 + 60\, x^2$$

القيم العظمى والصغرى Maximum and Minimum Points

القيم العظمى والصغرى لدالة ما هي التي تكون المشتقة الأولى للدالة عندها مساوية للصفر وبمعنى آخر مماس منحنى الدالة عند هذه المواضع موازى لمحور السينات. لتحديد النقاط الناتجة من حل المعادلة الناتجة من مساواة المشتقة الأولى للدالة بالصفر تكون نقطة نهاية عظمى إذا ما كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند هذه النقطة قيمة سالبة والعكس تكون نقطة نهاية صغرى إذا ما كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند هذه النقطة قيمة موجبة.
وأمر تنفيذ عملية إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة ما $f(x)$ فى الفترة (a,b) هو **NMaximize[f[x], x]** وينتج عن تنفيذه القيمة الصغرى للدالة وقيمة المتغير x التى تحدثها. أما الأمر **NMinimize[f[x], x]** وينتج عن تنفيذه القيمة الصغرى للدالة وقيمة المتغير x التى تحدثها.

مثال 5-1-9 لإيجاد القيم الصغرى فى الفترة (0,2) للدالة $y = x^3 - 2x - 5$ نكتب الأمر

```
NMaximize[x^3-2x-5, x]
```

لنحصل على

```
{-3.91134,{x→-0.816497}}
```

أى القيمة الصغرى فى الفترة (0,2) للدالة $y = x^3 - 2x - 5$ هى -3.91134 وتحدث عندما x=-0.816497 .

أما لتحديد القيم الصغرى وأين تحدث ننفذ الأمر

```
NMinimize[x^3-2x-5, x]
```

لنحصل على

```
{-6.08866,{x→0.816497}}
```

أى القيمة العظمى فى الفترة (0,2) للدالة $y = x^3 - 2x - 5$ هى -6.08866 وتحدث عندما x=0.816497 .

تمارين 5-1

1- أوجد قيم النهايات التالية:

(أ) $\lim_{x\to-\pi}\dfrac{1+\cos x}{x+\pi}$

(ب) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(ج) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$

(د) $\lim_{x\to 0^+}\sin(\dfrac{1}{x})$

2- أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية مبسطا الإجابة إن أمكن:

(أ) $f(x)=6x^3-5x^2+2x-3$

(ب) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

(ج) $f(x)=\sin(3x^2+2)$

(د) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

(ه) $f(x)=\sqrt{1+x^4}$

(و) $f(x)=x^n$

(ى) $f(x)=\arctan(x^2+1)$

(ن) $(x-1)^4=x^2-y^2$

3- أوجد المشتقة الثالثة للدوال التالية مبسطا الإجابة إن أمكن:

(أ) $f(x)=e^{ax+b}$

(ب) $f(x)=\log(ax+b)$

(ج) $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$

2-5 مفكوك (متسلسلة) تايلور Taylor (Series) Expansion

أى دالة قابلة للاشتقاق ومشتقتها كمية معرفة عند نقطة يمكن التعبير عنها بمتسلسلة يطلق عليها إسم متسلسلة (مفكوك)(كثيرات حدود) تايلور لهذه الدالة عند هذه النقطة وهى متسلسلة لانهائية. الصيغة الرياضية لها عند النقطة x=0 هى

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3+......+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+.......$$

بينما عند x=a هى

$$f(x-a)=f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{'''}(a)}{3!}(x-a)^3+.....+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n+......$$

والأمر المستخدم لتنفيذ عملية إيجاد مفكوك تايلور-ماكلورين للدالة f عندما x=0 إلى n حدا هو

Series[f[x], {*x*, a, *n*}]

وعندما x=a هو

Series[f[x], {*x*, 0, *n*}]

<u>مثال 5-2-1</u> لنفرض الدالة sin(x) فلإيجاد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك تايلور عند x=0 ننفذ الأمر التالى:

```
Series[Sin[x], {x, 0, 3}]
```

لنحصل على المطلوب

$$x-\frac{x^3}{6}+O[x]^4$$

مع ملاحظة أن الحد الأول والثالث أصفار لأن sin(0)=0 و $o[x]^4$ تعنى أننا توقفنا بداية من الرتبة الرابعة. ولحذف هذا الجزء من الناتج نستخدم الأمر

Normal[%]

حيث يستخدم الرمز % بدلا من كتابة ناتج آخر عملية لينتج عنه

$$x-\frac{x^3}{6}.$$

يمكن الحصول على ذلك مباشرة بدمج الأمر `Normal` مع أمر ايجاد المفكوك أى فى الصورة التالية

```
Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 3}]]
```

لنحصل على

$$x-\frac{x^3}{6}.$$

يمكن استخدام نفس الأمر لإيجاد مفكوك ذات الحدين $(1+x)^n$ فمثلا لإيجاد الحدود الأربعة الأولى ننفذ الأمر:

Series[(1 + x)^n, {x, 0, 3}]

ينتج عنه

$$1+n x+\frac{1}{2}(-1+n)\, n x^2+\frac{1}{6}(-2+n)(-1+n)\, n x^3+O[x]^4$$

مثال 5-2-2 لنفرض الدالة sin(x) فلإيجاد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك تايلور عند x=0.5 ننفذ الأمر التالى:

```
Series[Sin[x], {x, 0.5, 3}]
```

لنحصل على المطلوب

$$0.479426+0.877583(x-0.5)-0.239713(x-0.5)^2-0.146264(x-0.5)^3+O[x-0.5]^4$$

لمعرفة الفارق بين منحنى الدالة ومنحنى مفكوك الدالة سنأخذ المثال التالي:

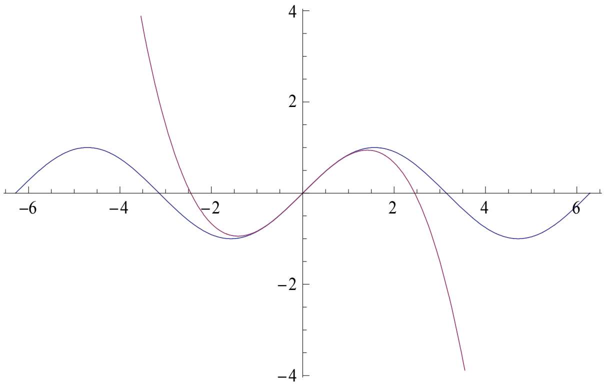
مثال 5-2-3 بالمثال السابق حصلنا على الحدود الأربعة الأولى من مفكوك تايلور عند x=0 للدالة sin(x) على الصورة

$$x-\frac{x^3}{6}$$

ولرسم منحنى الدالة ومنحنى مفكوك الدالة فى الفترة $i=[-2\pi,2\pi]$ نستخدم الأمر

```
Plot[{Sin[x],x-x^3/6}, {x, -2Pi, 2Pi}]
```

لنحصل على الشكل التالى:



يمكن رسم مفكوك الدالة لحدود مختلفة ....,n=3,4,5 بالشكل نفسه. والسؤال الآن ماذا عن ما تركنا من حدود من المتسلسلة النهائية. يسمى ذلك بقيمة الخطأ وهو الفارق بين الدالة

الأصلية $f(x)$ ومفكوكها $T_n(x)$ حتى الحد الذى وقفنا عنده وليكن n ويرمز له بالرمز $|f(x)-T_n(x)|$ وتقريب الدالة إلى مفكوك تايلور نرمز له بالرمز $|E_n(x)|$ ويمكن للبرنامج إيجاد الفارق بين الخطأ والتقريب.

تمارين 5-2

1- أوجد مفكوك تايلور من درجة n المعطاة وكذلك عند النقطة c حسب ما هو مبين فيما يلى:

(أ) $f(x) = e^{x}, n = 7, c = 0$

(ب) $f(x) = \sin x, n = 5, c = 0$

(ج) $f(x) = \sin(\mathrm{x}), n = 6, c = 2$

(د) $f(x) = \ln x, n = 5, c = 1$

3-5 التكامل لدالة فى متغير واحد

Integration of one variable

تعريف ريمان للتكامل هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f[x_k]\,\Delta x_k$$

شريطة أن تكون الدالة $f(x)$ متصلة والفكرة فى ايجاد التكامل تعتمد على تقسيم الفترة المغلقة [a ,b] إلى n من الفترات الجزئية المتتابعة أى فى الصورة
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ طول أى منها هو P.

يعرف التكامل أيضا على أنه العملية العكسية للتفاضل ناتج تكامل بعض الـدوال مبينـه بالجدول التالي:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sec^2(x)$	$\tan(x)$
$\cos ec^2(x)$	$\cot(x)$
$\sec(x)\tan(x)$	$\sec(x)$
$\cos ec(x)\cot an(x)$	$-\cos ec(x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$

ومن أهم طرق التكامل التكامل بالتعويض، التكامل بإستخدام الكسور الجزئيـة والتكامـل بالتجزىء. أما لإيجاد تكامـل دالـة مـا f(x) باسـتخدام البرنـامج نـستخدم الأمـر **Integrate[f[x], x]**.

مثال 5-3-1 لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sin(2x) - \tan(3x) + e^{2x} + x^3$ نكتب الأمر فى الصورة

```
Integrate[Sin[2x]-Tan[3x]+Exp[2x]+x^3, x]
```

وسنحصل على الإجابة

$$\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\text{Cos}[2x]+\frac{1}{3}\text{Log}[\text{Cos}[3x]]$$

يعتقد بعض المبتدئين أنه بامكانهم تكامل أى دالة ولكن ذلك غير صحيحا لا نظريا ولا حتى بالطرق العددية باستخدام البرامج الخاصة بذلك كما سيتضح بالمثال التالى:

مثال 5-3-2 لإيجاد التكامل $\int x^x dx$ ننفذ الأمر

Integrate[x^x, x]

لينتج عنه

$$\int x^x \, dx$$

التكامل المحدود Definite Integral

تكامل الدالة المحدود بفترة $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى الممثل بالدالـة بـين $a \le x \le b$ وقيمته هى

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

حيث F'(x) = f(x) .

لإيجاد تكامل دالة ما f(x) فى الفترة $a \le x \le b$ يستخدم الأمر

NIntegrate[f[x], {x, a, b}]

مثال 5-3-3 لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sin(2x)$ فى الفترة [-2,3] نكتب الأمر فى الصورة

```
NIntegrate[Sin[2x], {x , -2, 3}]
```

والناتج

```
0.806907
```

بينما استخدام الأمر

```
Integrate[Sin[2x], {x , -2, 3}]
```

ينتج عنه

$$\frac{1}{2}(\text{Cos}[4]-\text{Cos}[6])\ .$$

فى الواقع يستخدم أمر التكامل العددى لإيجاد القيمة التقريبية للتكاملات المحدودة التى لا يمكن ايجادها نظريا ويطلق عليها التكاملات المعتلة والتى يوضحها المثال التالى:

مثال 5-3-4 لإيجاد تكامل الدالة $f(x)=e^{-x^2}$ فى الفترة $[-\infty,\infty]$ ننفذ الأمر فى الصورة

```
NIntegrate[Exp[-x^2], {x, -Infinity, Infinity}]
```

ينتج عنه

.1.77245

مثال 5-3-5 لإيجاد التكامل $\int_a^b Sinxdx$ ننفذ الأمر

Integrate[Sin[x]^2, {x, a, b}]

لينتج عنه

$$\frac{1}{2}\left(-a+b+\text{Cos}[a]\ \text{Sin}[a]-\text{Cos}[b]\ \text{Sin}[b]\right)$$

دالة الخطأ Error Function

التكامل $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ لا يمكن حسابه باستخدام الطرق النظرية للتكامل وبالتالى لابد للجوء للطرق العددية. يسمى هذا التكامل بدالة الخطأ Error Function ويرمز لها بالرمز $erf(z)$ بينما $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-t^2}dt$ يرمز لها بالرمز $erf(z_0,z_1)$.

يمكن إشتقاق دالة الخطأ بالأمر

D[Erf[z],z]

وينتج عن تنفيذه المشتقة الأولى لدالة الخطأ وهى

$$\frac{2\,e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}$$

كذلك يمكن تكامل دالة الخطأ بالأمر

Integrate[Erf[z],z]

وينتج عن تنفيذه

$$\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}+z\,\text{Erf}[z]$$

لدالة الخطأ معكوس يمكن إيجاد المتسلسلة التى تمثله بالأمر

Series[InverseErf[x],{x,0,n}]

حيث n درجة المتسلسلة المطلوبة.

مثال 5-3-6 المتسلسلة التى تمثل معكوس دالة الخطأ من الدرجة الخامسة يتم الحصول عليها بالأمر

```
Series[InverseErf[x],{x,0,5}]
```

ينتج عنه المتسلسلة

$$\frac{\sqrt{\pi}\,x}{2} + \frac{1}{24}\pi^{3/2}x^3 + \frac{7}{960}\pi^{5/2}x^5 + O[x]^6$$

تمارين 5-3

1- إحسب التكاملات التالية:

(أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(ب) $\int x \sin(x^2) dx$

(ج) $\int \sin(3x)\sqrt{1-\cos(3x)}dx$

(د) $\int x^2\sqrt{x+4}dx$

(ه) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

2- إحسب كل من التكاملات التالية عدديا:

(أ) $\int_{0}^{\pi} e^{\sin x} dx$

(ب) $\int_{0}^{1} \sqrt{x^3+1}dx$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ما هو الفرق بين قيمة هذ التكامل باستخدام امر التكامل **Integrate** وأمر التكامل العددى **NIntegrate** .

4-5 تحويل لابلاس Laplace Transformation

تحويل لابلاس لدالة ما $f(t)$ ولقيمة $t \geq 0$ له الصيغة الرياضية $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$.حيث s عدد حقيقى. من التطبيقات التى يستخدم فيها تحويل لابلاس والتي لها اهتماما رياضيا هو حل المعادلات التفاضلية.

مثال 5-4-1 لحساب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = t^3 \sin 2t$

وأمر إيجاد تحويل لابلاس للدالة هو

```
LaplaceTransform[t^3 Sin[2t], t, s]
```

والناتج سيصبح

$$\frac{48\, s\, (-4 + s^2)}{(4 + s^2)^4}$$

مثال 5-4-2 لحساب تحويل لابلاس للدالة $t^3 \cos(2t)\sinh(7t)$

وأمر إيجاد تحويل لابلاس للدالة هو

```
LaplaceTransform[t^3 Sinh[7t] Cos[2t], t, s]
```

والناتج سيصبح

$$\frac{168\,(77564917\,s - 25057075\,s^3 + 782810\,s^5 + 530\,s^7 - 175\,s^9 + s^{11})}{(53 - 14\,s + s^2)^4\,(53 + 14\,s + s^2)^4}$$

ولتبسيط الناتج ننفذ الأمر

Simplify[%]

لنحصل على

$$\frac{168s\,(77564917 - 25057075\,s^2 + 782810\,s^4 + 530\,s^6 - 175\,s^8 + s^{10})}{(2809. - 90.\,s^2 + s^4)^4}$$

تذكر أن $\sinh(at) = \dfrac{e^{-at} - e^{at}}{2}$.

تحويل لابلاس العكسي Inverse Laplace Transformation

إذا ما عرفنا تحويل لابلاس يمكننا تحويل لابلاس العكسى من معرفة الدالة التى يمثلها هذا التحويل.

مثال 5-4-3 لنفرض أن ناتج تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو $Y=\frac{96}{(s^2+4)^4 s^3}-\frac{48}{(s^2+4)^3 s}$ والمطلوب معرفة هذه الدالة $f(t)$. لتنفيذ المطلوب باستخدام البرنامج ندخل التحويل الذي حصلنا عليه بالمثال السابق وتنفيذ أمر التحويل العكسى التالى:

```
InverseLaplaceTransform[48 s (-4 + s^2)/(4 + s^2)^4, s, t]
```

والناتج سيصبح

```
2 t^3 Cos[t] Sin[t]
```

وهى الدالة الأصلية التي **بالمثال 5-4-1** حيث أن $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$.

تذكر أنه لايجاد التحويل العكسى لمثل هذا النوع من المسائل نستخدم الكسور الجزئية لتقسيم المقدار الجبرى المطلوب ايجاد التحويل العكسي له إلى مقادير جبرية معلوم الدالة الذى يمثل ذلك المقدار تحويل لابلاس لها.

تحويل لابلاس للمشتقات

Laplace Transformation for derivatives of function

تحويل لابلاس يهىء وسائل مفيدة لحل المعادلات التفاضلية. لهذا السبب يكون من اللازم أن نوجد تحويل لابلاس للمشتقات. ومن أهم النظريات التى تربط العلاقة بين تحويل لابلاس لدالة ما f(t) و تحويل لابلاس لمشتقتها الأولى هى

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

و تحويل لابلاس لمشتقتها الثانية

$$L\{f''(t)\}=L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$$

وبصورة عامة العلاقة هى

$$L\{f^{(n)}(t)\}=L\{f(t)\}-s^n f(0)-s^{n-1}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

مثال 5-4-4 لحل المعادلة التفاضلية

$$y''+2y'+y=3te^{-t} \text{ بشرط } Y(0)=4, Y'(0)=2$$

باستخدام الخطوات الرياضية:

أولا: نوجد تحويل لابلاس للطرفين نحصل للطرف الأيمن على

$$L\{y''(t)\}+2L\{y'(t)\}+L\{y(t)\}=L\{3te^{-t}\}=$$
$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)\}-y'(0)+2(sL\{y(t)-y(0))$$

وللطرف الأيسر على

$$\mathrm{L}\{3\mathrm{te}^{-t}\}=\frac{3}{(1+\mathrm{s})^2}$$

وبمساواة الناتجين وبعد الاختصارات نحصل على

$$\mathrm{L}\{\mathrm{y(t)}\}=\frac{3}{(1+\mathrm{s})^4}+\frac{10+4s}{(s+1)^2}=\frac{3}{(1+\mathrm{s})^4}+\frac{4}{(1+\mathrm{s})}+\frac{6}{(1+\mathrm{s})^2}$$

ثانيا: للحصول على الحل نأخذ تحويل لابلاس العكسى للطرفين

$$\mathrm{y(t)}=L^{-1}\{\frac{3}{(1+\mathrm{s})^4}+\frac{4}{(1+\mathrm{s})}+\frac{6}{(1+\mathrm{s})^2}\}=\frac{t^3}{2}e^{-t}+4e^{-t}+6te^{-t}$$

ولكن باستخدام برنامج MATHEMATICA باستخدام الأمر

```
DSolve[{y''[t]+2y'[t]+y[t]==3t Exp[-t], y[0]==4,
        y'[0]==2},y,t]
```

لنحصل على نفس الناتج

$$\left\{\left\{y\to \mathrm{Function}\left[\{t\},\ \frac{1}{2}\,e^{-t}\,(8+12\,t+t^3)\right]\right\}\right\}$$

تمارين 5-4

1- أوجد تحويلات لابلاس الآتية:

(أ) $L\{(e^{3t}-e^{-3t})^2\}$

(ب) $L\{(\sqrt{t}+1)(2-\sqrt{t})/\sqrt{t}\}$

(ج) $L\{5\sinh 2t - 5\cosh 2t\}$

2- أوجد تحويلات لابلاس العكسية الآتية:

(أ) $L^{-1}\{\frac{2}{s-3}\}$

(ب) $L^{-1}\{\frac{2s-8}{s^2+36}\}$

(ج) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+3)(s+5)}\}$

5-5 تحويل فوريرفي البعد الواحد

One-dimensional Fourier transforms

الصيغة الرياضية لتحويل فورير للدالة $f(t)$ هى

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

الجدول التالى يبين الصيغ الرياضية المختلفة لتحويل فورير المستخدمة في المجالات المختلفة كالرياضيات البحتة، الفيزياء الكلاسيكية، الفيزياء الحديثة، النظم الهندسية ومعالجة الاشارات.

common convention	setting	Fourier transform	inverse Fourier transform
Mathematica default	{0, 1}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$
pure mathematics	{1, -1}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$
classical physics	{-1, 1}	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$
modern physics	{0, 1}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$
systems engineering	{1, -1}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$
signal processing	{0, -2Pi}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\omega t}\,dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{2\pi i\omega t}\,d\omega$
general case	{a, b}	$\sqrt{\frac{\lvert b\rvert}{(2\pi)^{1-a}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ib\omega t}\,dt$	$\sqrt{\frac{\lvert b\rvert}{(2\pi)^{1+a}}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-ib\omega t}\,d\omega$

وأمر إيجاد التحويل باستخدام برنامج MATHEMATICA في حالة الصيغة الرياضية وحسب الخيار للبارامتر $\{0,1\}$ هو:

```
FourierTransform[f[t], t, ω]
```

وفي حالة الصيغة الرياضية حسب الخيار الخاص للبارامتر مثلا في حالة معالجة الأشارات للبارامتر $\{0,2\pi\}$ هو:

```
FourierTransform[f[t], t, ω,
FourierParameters->{0,-2Pi}]
```

مثال 5-5-1 أمر إيجاد تحويل فورير للدالة $e^{-t^2}\sin t$ هو

FourierTransform[Exp[-t^2] Sin[t],t,ω]

والناتج سيصبح

$$\frac{i\,(-1+\text{Cosh}[w]+\text{Sinh}[w])\,(\text{Cosh}[\frac{1}{4}(1+w)^2]-\text{Sinh}[\frac{1}{4}(1+w)^2])}{2\sqrt{2}}$$

مثال 5-5-2 أمر إيجاد تحويل فورير للدالة $f(t)=e^{-t^2}$ حسب خيار البرنامج $\{0,1\}$ هو

```
FourierTransform[Exp[-t^2], t, ω]
```

والناتج سيصبح

$$\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

مثال 5-5-3 أمر إيجاد تحويل فورير للدالة $f(t)=e^{-t^2}$ حسب الخيار الخاص بمعالجة الأشارات للبارامتر $\{0,2\pi\}$ هو

```
FourierTransform[Exp[-t^2], t, ω,
  FourierParameters->{0, -2 Pi}]
```

والناتج سيصبح

$$e^{-\pi^2\omega^2}\sqrt{\pi}$$

تحويل فورير الجيبى و تحويل فورير لجيب التمام

Sin Fourier transforms and Cos Fourier transforms

فى بعض التطبيقات لتحويل فورير يكون من الأنسب تجنب استخدام الدالة الأسية لأس عقدى (أى الأس عدد عقدى). وحيث أن $e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)$. فانه باستبدال حدى التكامل من 0 إلى ∞ بدلا من $-\infty,\infty$ يمكن ايجاد تحويل فورير بدمج تحويل فوريرالجيبى (أى استبدال $e^{i\omega t}$ بالدالة الجيبية $\sin(\omega t)$) مع تحويل فورير لجيب التمام (أى استبدال $e^{i\omega t}$ بالدالة الجيبية $\cos(\omega t)$) ويمكن إيجادهم معا بالأمر التالى:

```
{FourierSinTransform[Exp[-t], t, ω],
 FourierCosTransform[Exp[-t], t, ω]}
```

مثال 5-5-4 أمر إيجاد تحويل فورير الجيبى مع تحويل فورير لجيب التمام للدالة $f(t) = e^{-t}$ هو

```
{FourierSinTransform[Exp[-t], t, ω],
 FourierCosTransform[Exp[-t], t, ω]}
```

والمركبة على اليسار من الناتج هى تحويل فورير الجيبى بينما المركبة اليمنى من الناتج هى تحويل فورير لجيب التمام للدالة $f(t) = e^{-t}$

$$\left\{\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \omega}{1+\omega^2},\ \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+\omega^2}\right\}$$

يمكن إيجاد كل منهم على حدة بتقسيم الأمر إلى كل من أمر تحويل فورير الجيبى حيث

```
FourierSinTransform[Exp[-t], t, w]
```

وينتج عنة

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ w}{1+w^2}$$

وأمر تحويل فورير لجيب التمام

```
FourierCosTransform[Exp[-t], t, w]
```

وينتج عنة

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+w^2}$$

وتحويل فورير العكسى في البعد الواحد

Inverse Fourier Transform

الصيغة الرياضية لتحويل فورير العكسى للدالة $F(\omega)$ هى

$$F^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

وأمر إيجاد التحويل العكسى باستخدام برنامج MATHEMATICA هو

`InverseFourierTransform[F[w], ω, t].`

مثال 5-5-5 الأمر

InverseFourierTransform[1,ω,t]

ينتج عنه الدالة

$\sqrt{2\pi}$ DiracDelta[t]

بينما

InverseFourierTransform[DiracDelta[ω],ω,t]

ينتج عنه الدالة

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

مما يؤكد أن تحويل لابلاس يحقق نفس خاصية الدوال وهى أن المعكوس لمعكوس الدالة هى الدالة الأصلية.

تمارين 5-5

1 - أوجد تحويل فورير الجيبى و تحويل فورير لجيب التمام للدالة $\frac{2}{1+4t^3}$.